И. СТЕЙН Г. ВЕЙС

ВВЕДЕНИЕ В ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

INTRODUCTION TO FOURIER ANALYSIS ON EUCLIDEAN SPACES

By Elias M. Stein & Guido Weiss

Princeton, New Jersey, Princeton University Press 1971

И. СТЕЙН, Г. ВЕЙС

ВВЕДЕНИЕ В ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Перевод с английского

В. В. ЖАРИНОВА

Под редакцией

Е. Д. СОЛОМЕНЦЕВА И С. Б. СТЕЧКИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1974

УДК 517

В монографии известных американских математиков И. Стейна и Г. Вейса гармонический анализ на n-мерных евклидовых пространствах излагается в основном в связи с теорией гармонических функций и систем гармонических функций. Такой подход представляет значительный интерес и позволяет получить ряд важных результатов. Приводимая здесь теория многомерных преобразований Фурье находит многочисленные применения в современной теоретической физике.

Книга написана на современном математическом уровне, необходимые вспомогательные сведения четко сформулированы, изложение вполне доступно широкому кругу математиков и физиков-теоретиков, включая аспирантов и студентов старших курсов физико-математических и физико-технических специальностей.

Редакция литературы по математическим наукам

С $\frac{20203\text{-}011}{041\,(01)\text{-}74}$ 11—74

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемая вниманию советского читателя книга американских математиков Илайеса М. Стейна и Гвидо Вейса представляет собой введение в теорию многомерных преобразований Фурье, написанное доступно, четко и компактно. За последние сорок-пятьдесят лет гармонический анализ довольно бурно развивался, и это развитие стимулировалось, в частности, потребностями современной теоретической физики. Многие его разделы тесно переплетаются с теорией функций одного и нескольких комплексных переменных. Как подчеркивают авторы, они не стремились охватить все аспекты гармонического анализа, а руководствовались четко выраженным стремлением показать, как в теории преобразований Фурье «методы вещественного и комплексного анализа обобщаются с одномерного случая на многомерный».

Формально говоря, для успешного изучения книги необходимо владение только университетским курсом вещественного и комплексного анализа. По существу, однако, предполагается и предварительное знакомство с теорией преобразований Фурье, например по книге Титчмарша [2].

В книге Стейна и Вейса явно выражена тенденция отбора только того материала, который лежит в круге интересов авторов. Та же тенденция заметна и в подборе литературы. При переводе и редактировании мы стремились по возможности указать на другие важнейшие подходы к предмету и в связи с этим несколько пополнили библиографию ссылками на работы, главным образом, советских авторов (эти дополнения отмечены звездочками). Хотелось бы также обратить внимание читателя на выходящие в русском издании фундаментальные монографии Э. Хьюитта и К. Росса «Абстрактный гармонический анализ» (том I — изд-во «Наука», том II — изд-во «Мир») и А. Г. Земаняна «Интегральные преобразования обобщенных функций» («Наука», 1974).

Мелкие недочеты и погрешности оригинала исправлены без дополнительных замечаний.

Е. Соломенцев

Эта книга посвящается А. Зигмунду в знак признательности за его дружбу, за то, что он нас многому научил и вдохновил на исследования

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРОВ

Эта книга является введением в гармонический анализ на евклидовых пространствах. Данная область математики за последние двадцать лет достигла бурного расцвета, но мы не пытались охватить все фазы этого развития. Скорее нашей задачей было проиллюстрировать применяемые в этом разделе гармонического анализа различные методы, использующие структуру евклидовых пространств. В частности, мы пытаемся показать, какую роль играют здесь сдвиги, растяжения и вращения. Другой задачей, связанной с этой главной, является мотивировка изучения гармонического анализа на более общих пространствах, имеющих аналогичную структуру (например, на симметрических пространствах). Мы полагаем, что изучение гармонического анализа в этой и других общих постановках становится более содержательным после того, как хорошо изучен евклидов случай.

В связи с этим мы не включили ряд вопросов, которые обычно приводятся в более общих трактатах по гармоническому анализу. Это касается, например, результатов, сконцентрированных вокруг тауберовой теоремы Винера, справедливых в случае произвольных локально компактных абелевых групп и не связанных со спецификой евклидовых пространств. Короче говоря, наш подбор материала мотивирован желанием показать, как методы вещественного и комплексного анализа обобщаются с одномерного случая на многомерный.

Предполагается, что читатель владеет теорией интегрирования и теорией функций комплексного переменного в объеме обычных курсов. Мы также полагаем, что эта книга принесет больше пользы тому, кто имеет некоторое предварительное знакомство с гармоническим анализом. Читателям, незнакомым с этим предметом, рекомендуется сначала просмотреть обзорную статью «Гармонический анализ» (см. Вейс [3]).

Идея написания этой книги впервые возникла у нас при изложении некоторых вопросов в курсе, который мы читали в 1958/59 учебном году. После этого каждый из нас читал лекции по данному предмету в разное время и в различных местах. Мы благодарны коллегам и слушателям, которые помогли нам прояснить наши идеи и собрать этот материал вместе.

И. Стейн
Г. Вейс

Глава I

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

В этой главе вводится преобразование Фурье и изучаются его наиболее элементарные свойства. Большая часть материала этой главы достаточно стандартна, поэтому наше изложение будет кратким. Сначала мы рассматриваем преобразования Фурье на пространствах $L^1(E_n)$ и $L^2(E_n)$. Этому посвящены первые два параграфа. Формальные аспекты преобразования Фурье легче описываются в терминах обобщенных функций; поэтому в третьем параграфе мы расширяем наше определение на пространство обобщенных функций медленного роста. Читатель заметит, что в этой главе мы в основном используем инвариантность евклидовых пространств относительно сдвигов. Однако в следующих главах (и особенно в главе IV) важную роль играют вращения в этих пространствах.

1. Основная L^1-теория преобразования Фурье

Мы начнем с введения обозначений, которые будут использоваться во всей книге. Через E_n обозначается n-мерное (вещественное) евклидово пространство. Его элементы мы обычно будем обозначать $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, ... *Скалярное произведение* элементов $x, y \in E_n$ есть число $x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$; *норма* элемента $x \in E_n$ есть (неотрицательное) число $|x| = \sqrt{x \cdot x}$; далее, $dx = dx_1 \ldots dx_n$ обозначает элемент обычной лебеговой меры.

Мы будем иметь дело с различными пространствами функций, определенных на E_n. Простейшие из них — это пространства $L^p = L^p(E_n)$, $1 \leqslant p < \infty$, т. е. пространства всех измеримых функций f, таких, что $\|f\|_p = \left(\int\limits_{E_n} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} < \infty$. Число $\|f\|_p$ называется *L^p-нормой* f. Пространство $L^\infty(E_n)$ состоит из всех существенно ограниченных функций на E_n; для $f \in L^\infty(E_n)$ мы положим норму $\|f\|_\infty$ равной существенной верхней грани $|f(x)|$ на E_n [1]. Часто более естественно, чем $L^\infty = L^\infty(E_n)$, возникает

---

[1] Мы говорим, что функция f *эквивалентна* g, если $f(x) = g(x)$ почти всюду на E_n, для любых $f, g \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Если рассмотреть соответствующие классы эквивалентности и положить *норму* класса равной норме любого из его представителей (очевидно, что $\|f\|_p = \|g\|_p$, если f эквивалентна g), то мы получим банахово пространство. Будем обозначать это пространство также $L^p(E_n)$. Какое из этих пространств $L^p(E_n)$ рассматривается в данный момент, будет очевидно из контекста.

пространство C_0 всех непрерывных функций, обращающихся в нуль на бесконечности, с только что описанной L^∞-нормой. Если не указано противное, все функции предполагаются комплекснозначными. Все встречающиеся функции считаются измеримыми (по Борелю).

Пусть $f \in L^1(E_n)$; *преобразование Фурье* функции f есть функция $\hat{f}$, определяемая равенством

$$\hat{f}(x) = \int_{E_n} f(t)\, e^{-2\pi i x \cdot t} dt$$

для всех $x \in E_n$. Легко установить следующие результаты:

Теорема 1.1. (a) *Отображение $f \to \hat{f}$ есть ограниченное линейное преобразование из $L^1(E_n)$ в $L^\infty(E_n)$, причем $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$;*

(b) *если $f \in L^1(E_n)$, то $\hat{f}$ равномерно непрерывна.*

Теорема 1.2 (Риман — Лебег). *Если $f \in L^1(E_n)$, то $\hat{f}(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$; отсюда, в силу предыдущей теоремы, $\hat{f} \in C_0$.*

Теорема 1.1 очевидна; более того, очевидна и теорема 1.2, когда f есть характеристическая функция n-мерного интервала $I = \{x \in E_n;\ a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ \ldots, \ a_n \leqslant x_n \leqslant b_n\}$ (так как мы можем вычислить $\hat{f}$ явно повторным интегрированием). То же самое, следовательно, верно и для конечных линейных комбинаций таких характеристических функций. Результат для произвольной $f \in L^1(E_n)$ легко доказывается приближением f по L^1-норме такими линейными комбинациями g, так как тогда $f = g + (f - g)$, где $\hat{f} - \hat{g}$ равномерно мала (по теореме 1.1 (a)), а $\hat{g}(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$.

Теорема 1.2 дает необходимое условие того, чтобы данная функция была преобразованием Фурье некоторой функции из $L^1(E_n)$. Принадлежности к пространству C_0, однако, далеко не достаточно (см. 4.1).

Приведенное выше определение преобразования Фурье немедленно распространяется на конечные борелевские меры: если μ — такая мера на E_n, определим $\hat{\mu}$ равенством

$$\hat{\mu}(x) = \int_{E_n} e^{-2\pi i t \cdot x} d\mu(t).$$

Теорема 1.1 будет справедлива для этих преобразований Фурье, если мы заменим L^1-норму на полную вариацию меры μ.

В дополнение к операциям векторного пространства, $L^1(E_n)$ наделено «умножением», превращающим это пространство в банахову алгебру. Эта операция, называемая *сверткой,* определяется

следующим образом: если f и g принадлежат $L^1(E_n)$, то их свертка $h = f * g$ есть функция, значение которой в точке $x \in E_n$ равно

$$h(x) = \int_{E_n} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

При помощи элементарных рассуждений можно показать, что $f(x-y)\,g(y)$ есть измеримая функция двух переменных x и y. Тогда из теоремы Фубини о перемене порядка интегрирования немедленно следует, что $h \in L^1(E_n)$ и $\|h\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$. Далее, эта операция коммутативна и ассоциативна. Свертка $h = f * g$ определена также для всех $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $g \in L^1(E_n)$. Действительно, имеет место

Теорема 1.3. *Пусть $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $g \in L^1(E_n)$; тогда $h = f * g$ определена и принадлежит $L^p(E_n)$, причем*

$$\|h\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1.$$

Ясно, что $|h(x)| \leqslant \int_{E_n} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy$, так что доказываемый результат есть простое следствие интегрального неравенства Минковского

$$\left(\int_{E_n} |h(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant \int_{E_n} \left(\int_{E_n} |f(x-y)|^p\,dx\right)^{1/p} |g(y)|\,dy = \|f\|_p \|g\|_1.$$

Как и в случае преобразования Фурье, мы можем расширить эти операции на конечные борелевские меры: пусть μ — такая мера на E_n; определим $h = f * d\mu$, положив

$$h(x) = \int_{E_n} f(x-y)\, d\mu(y)$$

для $x \in E_n$ и $f \in L^p$. Теорема 1.3 справедлива для такой свертки с заменой L^1-нормы функции g на полную вариацию меры μ.

Существенной чертой гармонического анализа является тот факт, что преобразование Фурье свертки двух функций есть (поточечное) произведение их преобразований Фурье. Точнее, из определений легко вытекает следующая

Теорема 1.4. *Пусть f и g принадлежат $L^1(E_n)$; тогда*

$$(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}\,[1].$$

Многие другие важные операции анализа также имеют простую связь с преобразованием Фурье. Например, пусть τ_h обозначает

[1] Мы будем постоянно использовать это обозначение: $(\ldots)^\wedge$ обозначает преобразование Фурье выражения $(\ldots)$.

сдвиг на вектор $h \in E_n$ (т. е. τ_h есть оператор, переводящий функцию $g(x)$ в функцию $g(x-h)$); тогда

$$(1.5)\qquad \begin{aligned} &\text{(i)}\quad (\tau_h f)^\wedge(x) = e^{-2\pi i h\cdot x}\hat{f}(x),\\ &\text{(ii)}\quad (e^{2\pi i t\cdot h} f(t))^\wedge(x) = (\tau_h \hat{f})(x) \end{aligned}$$

для всех $f \in L^1(E_n)$.

Пусть $a > 0$; обозначим через δ_a *растяжение* с коэффициентом a, т. е. оператор, переводящий функцию $g(x)$ в функцию $g(ax)$. Для любой $f \in L^1(E_n)$ имеем

$$(1.6)\qquad a^n(\delta_a f)^\wedge(x) = \hat{f}(a^{-1}x).$$

Дифференцирование и преобразование Фурье связаны следующим образом:

Теорема 1.7. *Пусть $f \in L^1(E_n)$ и $x_k f(x) \in L^1(E_n)$, где x_k есть k-я координата x; тогда $\hat{f}$ дифференцируема по x_k и*

$$\frac{\partial \hat{f}(x)}{\partial x_k} = (-2\pi i t_k f(t))^\wedge(x).$$

Доказательство. Обозначим через $h = (0, \ldots, h_k, \ldots, 0)$ ненулевой вектор, направленный вдоль k-й оси координат; тогда, в силу части (ii) равенств (1.5) и теоремы Лебега (о мажорируемой сходимости), имеем

$$\frac{\hat{f}(x+h)-\hat{f}(x)}{h_k} = \left\{\frac{e^{-2\pi i t\cdot h}-1}{h_k} f(t)\right\}^\wedge(x) \to (-2\pi i t_k f(t))^\wedge(x)$$

при $h_k \to 0$.

Теорема 1.7 утверждает, что применение преобразования Фурье после умножения на k-ю координату эквивалентно (с точностью до постоянного множителя) взятию частной производной преобразования Фурье по k-й переменной. Верно также, что преобразование Фурье таких частных производных можно получить (опять с точностью до постоянного множителя), умножая преобразование Фурье на соответствующие координаты. Мы встретим много вариантов этого результата. Для того чтобы дать точную формулировку одного из этих вариантов (возможно, наиболее простого для доказательства), введем следующее понятие: будем говорить, что f *дифференцируема по L^p-норме (по x_k)*, если $f \in L^p(E_n)$ и существует $g \in L^p(E_n)$, такая, что

$$\left(\int_{E_n}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h_k} - g(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \to 0$$

при $h_k \to 0$ (мы опять используем обозначение, введенное при доказательстве теоремы 1.7). Функция g называется *частной производной f (по x_k) по L^p-норме.*

Применяя равенство (1.5) (i) и теорему 1.1 (a) к выражению

$$|\hat{g}(x) - \hat{f}(x)(e^{2\pi i h \cdot x} - 1)/h_k|$$

и устремляя h_k к нулю, получим такое утверждение:

Теорема 1.8. *Пусть $f \in L^1(E_n)$ и g — частная производная f по L^1-норме (по x_k); тогда*

$$\hat{g}(x) = 2\pi i x_k \hat{f}(x).$$

Теоремы 1.7 и 1.8 можно распространить на производные высших порядков. Не входя в детали, отметим следующие формулы:

$$(1.9)\qquad \begin{aligned} &\text{(i)} \quad P(D)\hat{f}(x) = (P(-2\pi i t) f(t))^{\wedge}(x), \\ &\text{(ii)} \quad (P(D) f)^{\wedge}(x) = P(2\pi i x)\hat{f}(x), \end{aligned}$$

где для произвольного мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (из неотрицательных целых чисел) $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = \partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}/\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}$, P есть полином от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ и $P(D)$ — ассоциированный дифференциальный оператор (т. е. x^α в $P(x)$ заменено на D^α).

Теперь мы займемся проблемой обращения преобразования Фурье, т. е. рассмотрим такой вопрос: *если дано преобразование Фурье $\hat{f}$ некоторой интегрируемой функции f, то как восстановить f по $\hat{f}$?* Читатель, знакомый с элементарной теорией рядов и интегралов Фурье, ожидает, что $f(t)$ будет равна интегралу

$$(1.10)\qquad \int_{E_n} \hat{f}(x) e^{2\pi i t \cdot x} dx.$$

К несчастью, $\hat{f}$ может оказаться неинтегрируемой (например, пусть $n = 1$ и f — характеристическая функция конечного интервала). Для того чтобы обойти эту трудность, воспользуемся методами суммирования интегралов. Введем сначала *метод суммирования Абеля,* аналог которого для рядов широко известен. Для каждого $\varepsilon > 0$ определим *среднее Абеля* $A_\varepsilon = A_\varepsilon(f)$ равенством

$$A_\varepsilon(f) = A_\varepsilon = \int_{E_n} f(x) e^{-\varepsilon |x|} dx.$$

Ясно, что если $f \in L^1(E_n)$, то $\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(f) = \int_{E_n} f(x)\,dx$. С другой стороны, эти абелевы средние могут быть определены даже тогда, когда f неинтегрируема (например, если f ограничена, то $A_\varepsilon(f)$ существуют для всех $\varepsilon > 0$). Более того, их предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{E_n} f(x)\,e^{-\varepsilon|x|}dx \tag{1.11}$$

также может существовать и в тех случаях, когда f неинтегрируема. Классический пример такого случая мы получим, положив $n = 1$ и $f(x) = \sin x/x$[1].

Если предел в (1.11) существует и конечен, то говорят, что интеграл $\int_{E_n} f(x)\,dx$ *суммируем по Абелю* к этому пределу.

До некоторой степени аналогичным методом суммирования является *суммирование по Гауссу*. Этот метод определяется *средними Гаусса* (иногда их называют средними Гаусса — Вейерштрасса)

$$G_\varepsilon(f) = G_\varepsilon = \int_{E_n} f(x)\,e^{-\varepsilon|x|^2}dx.$$

Говорят, что интеграл $\int_{E_n} f(x)\,dx$ *суммируем по Гауссу* (к l), если предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{E_n} f(x)\,e^{-\varepsilon|x|^2}dx \tag{1.11$'$}$$

существует и равен l.

Мы видим, что как (1.11), так и (1.11′) могут быть представлены в виде

$$M_{\varepsilon,\Phi}(f) = M_\varepsilon(f) = \int_{E_n} \Phi(\varepsilon x)\,f(x)\,dx, \tag{1.12}$$

где $\Phi \in C_0$ и $\Phi(0) = 1$. При этом интеграл $\int_{E_n} f(x)\,dx$ суммируем к l, если $\lim_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon(f) = l$. Величины $M_\varepsilon(f)$ мы будем называть *Φ-средними* этого интеграла.

Нам понадобятся преобразования Фурье функций $e^{-\varepsilon|x|^2}$ и $e^{-\varepsilon|x|}$. Первое из них легко вычисляется посредством сведения к

---

[1] Как известно, в этом случае существует $\lim_{p\to\infty} \int_0^p f(x)\,dx$. Легко показать, что если f локально интегрируема и такой предел l существует, то средние Абеля $A_\varepsilon = \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} f(x)\,dx$ сходятся к l при $\varepsilon \to 0$.

одномерному случаю. Имеем:

$$\int_{E_n} e^{-4\pi^2|x|^2} e^{-2\pi i x\cdot t}dx = \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 x_j^2} e^{-2\pi i x_j t_j} dx_j =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-t_j^2/4} = 2^{-n}\pi^{-n/2} e^{-|t|^2/4}.$$

Производя замену переменных $x = (\sqrt{\alpha}/2\sqrt{\pi})\, y$, убеждаемся, что справедлива

Теорема 1.13. *Пусть* $\alpha > 0$; *тогда*

$$\int_{E_n} e^{-\pi\alpha|y|^2} e^{-2\pi i t\cdot y}dy = \alpha^{-n/2} e^{-\pi|t|^2/\alpha}\ ^{1)}.$$

Преобразование Фурье второй функции получить несколько труднее.

Теорема 1.14. *Пусть* $\alpha > 0$; *тогда*

$$\int_{E_n} e^{-2\pi\alpha|y|} e^{-2\pi i t\cdot y}dy = c_n \frac{\alpha}{(\alpha^2 + |t|^2)^{(n+1)/2}},$$

где $c_n = \Gamma[(n+1)/2]/\pi^{(n+1)/2}$.

Доказательство. С помощью замены переменных задача сводится к случаю, когда $\alpha = 1$. Предположим, что справедливо равенство

(i) $$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\beta^2/4u}du$$

для всех $\beta > 0$. Тогда, используя теорему 1.13 для установления третьего равенства, получим

$$\int_{E_n} e^{-2\pi|y|} e^{-2\pi i t\cdot y}dy = \int_{E_n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-4\pi^2|y|^2/4u}du \right\} e^{-2\pi i t\cdot y}dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left\{ \int_{E_n} e^{-4\pi^2|y|^2/4u} e^{-2\pi i t\cdot y}dy \right\} du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left\{ \left(\sqrt{\frac{u}{\pi}} \right)^n e^{-u|t|^2} \right\} du =$$

$$= \frac{1}{\pi^{(n+1)/2}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{(n-1)/2} e^{-u|t|^2} du =$$

---

[1]) Отсюда следует, что функция $e^{-\pi|x|^2}$ совпадает со своим преобразованием Фурье.

$$= \frac{1}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}} \int_0^\infty e^{-s} s^{(n-1)/2} ds =$$

$$= \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}}.$$

Следовательно, теорема будет доказана, если будет установлена справедливость равенства (i). Мы сделаем это, используя тождества

(ii)
$$e^{-\beta} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{1+x^2} dx, \qquad \beta > 0,$$

(iii)
$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-(1+x^2)u} du.$$

Второе из них очевидно, в то время как первое легко доказывается применением теории вычетов к функции $e^{i\beta z}/(1+z^2)$. Таким образом,

$$e^{-\beta} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \beta x \left\{ \int_0^\infty e^{-u} e^{-ux^2} du \right\} dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left\{ \int_0^\infty e^{-ux^2} \cos \beta x dx \right\} du = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-ux^2} e^{i\beta x} dx \right\} du =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left\{ \pi \int_{-\infty}^\infty e^{-4\pi^2 u y^2} e^{-2\pi i \beta y} dy \right\} du =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{u}} e^{-\beta^2/4u} \right\} du,$$

и теорема доказана.

Мы будем обозначать преобразования Фурье функций $e^{-4\pi^2\alpha|y|^2}$ и $e^{-2\pi\alpha|y|}$, $\alpha > 0$, буквами W и P соответственно. Таким образом, $W(t, \alpha) = (4\pi\alpha)^{-n/2} e^{-|t|^2/4\alpha}$ и $P(t, \alpha) = c_n [\alpha/(\alpha^2 + |t|^2)^{(n+1)/2}]$. Первая из этих функций называется *ядром Вейерштрасса* (или *Гаусса — Вейерштрасса*), а вторая — *ядром Пуассона* [1].

[1] В последующих параграфах мы встретимся с другими ядрами Пуассона; они будут связаны с определенными областями. По этой причине мы в дальнейшем будем называть только что введенное ядро *ядром Пуассона, ассоциированным с верхним полупространством*

$$E_{n+1}^+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in E_{n+1};\ x_{n+1} > 0\}.$$

Мы покажем, в частности, что средние Абеля и Гаусса интеграла (1.10) сходятся к f (оба по норме и почти всюду). Это будет сделано путем вывода общей формулы, выражающей указанные средние в терминах сверток f с ядрами Пуассона и Вейерштрасса. Для того чтобы получить эти выражения, мы используем следующий важный результат:

Теорема 1.15 (формула умножения). *Пусть f и g принадлежат $L^1(E_n)$; тогда*

$$\int_{E_n} \hat{f}(x)\, g(x)\, dx = \int_{E_n} f(x)\, \hat{g}(x)\, dx.$$

Доказательство. Применяя теорему Фубини, получаем

$$\int_{E_n} \hat{f}(x)\, g(x)\, dx = \int_{E_n} \left\{ \int_{E_n} f(t)\, e^{-2\pi i t\cdot x} dt \right\} g(x)\, dx =$$

$$= \int_{E_n} \left\{ \int_{E_n} g(x)\, e^{-2\pi i t\cdot x} dx \right\} f(t)\, dt =$$

$$= \int_{E_n} f(t)\, \hat{g}(t)\, dt.$$

Предположим теперь, что функция Φ в (1.12) интегрируема и ее преобразование Фурье есть $\hat{\Phi} = \varphi$. Положим $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$; тогда из (1.6) следует, что $(\delta_\varepsilon\Phi)^\wedge(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon) = \varphi_\varepsilon(x)$. В частности, из теоремы 1.13 вытекает, что если $\Phi(x) = e^{-4\pi^2|x|^2}$, то $\varphi_\varepsilon(x) = W(x, \varepsilon^2)$, и, аналогично, из теоремы 1.14 следует, что $\varphi_\varepsilon(x) = P(x, \varepsilon)$, когда $\Phi(x) = e^{-2\pi|x|}$. Теперь, применяя формулу умножения (теорема 1.15) к функциям $f(x)$ и $e^{2\pi i t\cdot x}\delta_\varepsilon\Phi(x)$ и используя (1.5) (ii) для вычисления преобразования Фурье последней функции, получаем следующую теорему:

Теорема 1.16. *Пусть f и Φ принадлежат $L^1(E_n)$ и $\varphi = \hat{\Phi}$; тогда*

$$\int_{E_n} \hat{f}(x)\, e^{2\pi i t\cdot x}\Phi(\varepsilon x)\, dx = \int_{E_n} f(x)\, \varphi_\varepsilon(x - t)\, dx$$

для всех $\varepsilon > 0$. В частности,

$$\int_{E_n} \hat{f}(x)\, e^{2\pi i t\cdot x} e^{-2\pi\varepsilon|x|} dx = \int_{E_n} f(x)\, P(x - t, \varepsilon)\, dx$$

и

$$\int_{E_n} \hat{f}(x)\, e^{2\pi i t\cdot x} e^{-4\pi^2\alpha|x|^2} dx = \int_{E_n} f(x)\, W(x - t, \alpha)\, dx$$

для всех $\alpha > 0$.

Покажем теперь, что интеграл (1.10) суммируем к f для широкого класса методов суммирования, включающего методы Абеля и Гаусса. Сначала покажем, что средние (см. (1.12)) $\int_{E_n} \hat{f}(x)\, e^{2\pi i t \cdot x}\Phi(\varepsilon x)\, dx$ сходятся к f по L^1-норме при следующих довольно общих условиях: Φ и $\hat{\Phi} = \varphi$ обе интегрируемы и $\int_{E_n} \varphi(x)\, dx = 1$. Следующая лемма показывает, что ядра Пуассона и Гаусса — Вейерштрасса удовлетворяют этим условиям.

Лемма 1.17. (a) $\int_{E_n} W(x, \alpha)\, dx = 1$ *для всех* $\alpha > 0$;

(b) $\int_{E_n} P(x, \varepsilon)\, dx = 1$ *для всех* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Производя замену переменных, прежде всего заметим, что $\int_{E_n} W(x, \alpha)\, dx = \int_{E_n} W(x, 1)\, dx$ и $\int_{E_n} P(x, \varepsilon)\, dx = \int_{E_n} P(x, 1)\, dx$. Таким образом, достаточно доказать лемму в случае, когда $\alpha = \varepsilon = 1$. Но тогда часть (a) есть непосредственное следствие одномерного равенства $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4} dx = 2\sqrt{\pi}$ (так как n-мерный интеграл может быть записан в виде произведения n таких интегралов). Для того чтобы установить (b), прежде всего заметим, что $1/c_n = \pi^{(n+1)/2}/\Gamma[(n+1)/2]$ есть половина площади поверхности единичной сферы Σ_n в E_{n+1}. Обозначая эту площадь ω_n, мы видим, что (b) эквивалентно равенству

$$\int_{E_n} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^{(n+1)/2}} = \frac{\omega_n}{2}.$$

Но, полагая $r = |x|$, $x' = x/r$ (когда $x \neq 0$), $\Sigma_{n-1} = \{x \in E_n;\ |x| = 1\}$, dx' — элемент площади поверхности на Σ_{n-1} и, наконец, $r = \operatorname{tg}\theta$, получим

$$\int_{E_n} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^{(n+1)/2}} = \int_0^{\infty} \left(\int_{\Sigma_{n-1}} \frac{1}{(1 + r^2)^{(n+1)/2}}\, dx' \right) r^{n-1} dr =$$

$$= \omega_{n-1} \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{(n+1)/2}} dr =$$

$$= \omega_{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}\theta d\theta$$ [1].

Но $\omega_{n-1} \sin^{n-1}\theta$, очевидно, есть площадь поверхности сферы радиуса $\sin\theta$, получающейся при пересечении Σ_n с гиперплоскостью $x_{n+1} = \cos\theta$. Таким образом, площадь верхней половины Σ_n получается суммированием этих $(n-1)$-мерных площадей, когда θ меняется от 0 до $\pi/2$, т. е.

$$\omega_{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}\theta d\theta = \frac{\omega_n}{2},$$

а это и есть искомый результат.

Теорема 1.18. *Пусть* $\varphi \in L^1(E_n)$ *и* $\int_{E_n} \varphi(x)\,dx = 1$; *положим* $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. *Если* $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p < \infty$, *или* $f \in C_0 \subset L^\infty(E_n)$, *то* $\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$. *В частности,* $u(x, \varepsilon) = \int_{E_n} f(t)\,P(x-t, \varepsilon)\,dt$ *и* $s(x, \varepsilon) = \int_{E_n} f(t)\,W(x-t, \varepsilon)\,dt$ *сходятся к* f *по* L^p*-норме при* $\varepsilon \to 0$ [2].

Доказательство. Производя замену переменных, получаем

$$\int_{E_n} \varphi_\varepsilon(t)\,dt = \int_{E_n} \varepsilon^{-n}\varphi(t/\varepsilon)\,dt = \int_{E_n} \varphi(t)\,dt = 1.$$

Отсюда

$$(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x) = \int_{E_n} f(x-t)\,\varphi_\varepsilon(t)\,dt - \int_{E_n} f(x)\,\varphi_\varepsilon(t)\,dt =$$

$$= \int_{E_n} [f(x-t) - f(x)]\,\varphi_\varepsilon(t)\,dt.$$

---

[1] Мы, конечно, выражаем наш первоначальный интеграл в «полярных координатах» (r, x'). Напомним читателю, что $dx = r^{n-1}\,dr\,dx'$ (см. (4.14) и библиографические замечания для выяснения дальнейших деталей).

[2] Функция $u(x, \varepsilon)$, определенная при $x \in E_n$ и $\varepsilon > 0$, называется *интегралом Пуассона* функции f; $s(x, \varepsilon)$ называется *интегралом Гаусса — Вейерштрасса* функции f.

Следовательно, в силу интегрального неравенства Минковского, имеем

$$\|f*\varphi_\varepsilon - f\|_p \leqslant \int\limits_{E_n} \left(\int\limits_{E_n} |f(x-t) - f(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \varepsilon^{-n} |\varphi(t/\varepsilon)|\, dt =$$

$$= \int\limits_{E_n} \left(\int\limits_{E_n} |f(x-\varepsilon t) - f(x)|^p\, dx \right)^{1/p} |\varphi(t)|\, dt.$$

Выражение $\left(\int\limits_{E_n} |f(x+h) - f(x)|^p\, dx \right)^{1/p} = \omega_{p,f}(h) = \omega(h)$ называют *L^p-модулем непрерывности* функции f. Он, очевидно, ограничен как функция h, поскольку $\omega(h) \leqslant 2\|f\|_p$. Более того, $\omega(h) \to 0$ при $|h| \to 0$. Это очевидно, когда f непрерывна и имеет компактный носитель. В общем случае оценку легко получить, приближая f (по L^p-норме) такими функциями. Мы показали, следовательно, что

$$\|f*\varphi_\varepsilon - f\|_p \leqslant \int\limits_{E_n} \omega(-\varepsilon t)\, |\varphi(t)|\, dt.$$

Но, по теореме Лебега (о мажорируемой сходимости), интеграл в правой части стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$, так как подинтегральная функция стремится к 0 и мажорируется интегрируемой функцией $2\|f\|_p |\varphi(t)|$. Это доказывает теорему.

Хотя это и не связано с нашим изучением обращения интеграла Фурье, заметим, что по существу те же рассуждения дают следующий результат, который будет полезен нам в дальнейшем:

Следствие 1.19. *Пусть $\varphi \in L^1(E_n)$ и $\int\limits_{E_n} \varphi(t)\, dt = 0$; тогда $\|f*\varphi_\varepsilon\|_p \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для всех $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p < \infty$, или $f \in C_0 \subset L^\infty(E_n)$.*

Доказательство. Так как $(f*\varphi_\varepsilon)(x) = (f*\varphi_\varepsilon)(x) - f(x)\cdot 0 = (f*\varphi_\varepsilon)(x) - f(x)\int\limits_{E_n} \varphi_\varepsilon(t)\, dt = \int\limits_{E_n} [f(x-t) - f(x)]\, \varphi_\varepsilon(t)\, dt$, то остальная часть доказательства проводится точно так же, как доказательство предыдущей теоремы.

С помощью теорем 1.16 и 1.18 мы получаем следующее решение задачи обращения преобразования Фурье:

Теорема 1.20. *Пусть Φ и ее преобразование Фурье $\varphi = \widehat{\Phi}$ интегрируемы и $\int\limits_{E_n} \varphi(x)\, dx = 1$; тогда Φ-средние интеграла $\int\limits_{E_n} \hat{f}(t)\, e^{2\pi i x\cdot t} dt$ сходятся к $f(x)$ по L^1-норме. В частности, средние Абеля и Гаусса этого интеграла сходятся к $f(x)$ по L^1-норме.*

Так как $s(x, \alpha) = \int\limits_{E_n} \hat{f}(t)\, e^{2\pi i x\cdot t} e^{-4\pi^2\alpha|t|^2} dt$ сходится в L^1 к $f(x)$ при $\alpha > 0$, стремящемся к 0, то можно найти последовательность $\alpha_k \to 0$, такую, что $s(x, \alpha_k) \to f(x)$ для почти всех x.

Если мы предположим еще, что $\hat{f} \in L^1(E_n)$, то теорема Лебега (о мажорируемой сходимости) даст нам следующее поточечное равенство:

Следствие 1.21. *Если f и $\hat{f}$ обе интегрируемы, то*

$$f(x) = \int\limits_{E_n} \hat{f}(t)\, e^{2\pi i x\cdot t} dt$$

для почти всех $x \in E_n$ [1].

Мы выделили методы суммирования Гаусса — Вейерштрасса и Абеля. Первый из них, вероятно, самый простой, последний же, как мы увидим во второй главе, тесно связан с гармоническими функциями и дает нам очень мощное средство гармонического анализа [2].

Типичным примером сравнительной простоты метода Гаусса — Вейерштрасса является теорема 1.13, доказательство которой значительно проще, чем доказательство соответствующего результата для метода Абеля (теорема 1.14).

Мы также видели, что часть (a) леммы 1.17 гораздо легче доказать, чем часть (b). Интересно отметить, что следствие 1.21 позволяет доказать последний результат без вычислений, проводившихся при доказательстве леммы 1.17. Действительно, применяя следствие 1.21 к $f(x) = e^{-2\pi\varepsilon|x|}$ и используя теорему 1.14, мы получим, что $\int\limits_{E_n} P(t, \varepsilon)\, e^{2\pi i x\cdot t} dt = e^{-2\pi\varepsilon|x|}$. Полагая $x = 0$, находим, что $\int\limits_{E_n} P(t, \varepsilon)\, dt = 1$.

Из теоремы 1.18 следует, что если $\hat{f}(x) = 0$ для всех x, то $f(t) = 0$ для почти всех t. Применяя это утверждение к $f = f_1 - f_2$, получаем следующий результат о единственности преобразования Фурье:

Следствие 1.22. *Пусть f_1 и f_2 принадлежат $L^1(E_n)$ и $\hat{f}_1(x) = \hat{f}_2(x)$ для всех $x \in E_n$; тогда $f_1(t) = f_2(t)$ для почти всех $t \in E_n$.*

---

[1] Мы знаем из теоремы 1.1, что $\hat{f}$ непрерывна. Если $\hat{f}$ интегрируема, то интеграл $\int\limits_{E_n} \hat{f}(t)\, e^{2\pi i x\cdot t} dt$ также определяет непрерывную функцию (фактически равную $(\hat{f})^{\wedge}(-x)$). Таким образом, изменяя f на множестве меры 0, мы можем добиться выполнения равенства из следствия 1.21 для всех x.

[2] Аналогичным образом метод Гаусса — Вейерштрасса тесно связан с решением уравнения теплопроводности.

Задача обращения преобразования Фурье имеет также решение в поточечном смысле. Мы покажем, в частности, что средние Абеля и Гаусса интеграла (1.10) сходятся почти всюду к $f(t)$. Для этого нужно ввести несколько новых понятий и обозначений. Прежде всего приведем один важный результат из теории дифференцирования интегралов функций, определенных на E_n. Если f локально интегрируема на E_n, то для почти всех $x \in E_n$

$$\frac{1}{r^n} \int\limits_{|t|<r} [f(x-t) - f(x)]\, dt \to 0 \tag{1.23}$$

при $r \to 0$ [1]. В частности, это верно для $f \in L^p(E_n)$. Мы будем называть множество точек x, для которых справедливо (1.23), *множеством точек, на котором дифференцируем интеграл функции* f. Такое множество естественным образом ассоциируется с каждой локально интегрируемой функцией f. Существует более узкое, но тесно связанное с указанным множество, которое (как мы увидим) также естественно ассоциируется с f. Это множество всех точек x, таких, что

$$\frac{1}{r^n} \int\limits_{|t|<r} |f(x-t) - f(x)|\, dt \to 0 \tag{1.24}$$

при $r \to 0$; оно называется *лебеговым множеством* функции f и включает в себя почти все точки из E_n. Чтобы убедиться в этом, отметим, что так как функция $|f(t) - \rho|$ локально интегрируема, то из (1.23) следует, что множество F_ρ всех $x \in E_n$, для которых не выполняется соотношение

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \int\limits_{|t|<r} \{|f(x-t) - \rho| - |f(x) - \rho|\}\, dt = 0,$$

имеет меру 0. Следовательно, объединение множеств F_ρ по всем рациональным числам ρ имеет меру 0. Обозначим это объединение через F. Мы утверждаем, что если $x \in E_n \setminus F$, то выполняется равенство (1.24). Действительно, пусть даны такое x и произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем рациональное число ρ таким, чтобы $|f(x) - \rho| < \varepsilon/2$, и обозначим через Ω_n объем единичного шара в E_n. То-

[1] Обозначим через $S(x;\, r)$ шар $\{t \in E_n;\ |t - x| < r\}$, а через $|S(x;\, r)|$ его меру; тогда (1.23) эквивалентно равенству $f(x) = \lim\limits_{r\to 0} |S(x;\, r)|^{-1} \int\limits_{S(x;\, r)} f(t)\,dt$. При $n = 1$ оно переходит в равенство $f(x) = \lim\limits_{r\to 0} (1/2r) \int\limits_{x-r}^{x+r} f(t)\, dt$, которое, как утверждает классическая теорема Лебега, справедливо почти всюду. Доказательство того, что (1.23) выполняется почти всюду, мы откладываем до второй главы, где будет видно, что оно есть следствие общей техники, включающей максимальные функции Харди — Литтлвуда (см. следствие 3.14 во второй главе).

гда

$$\frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-\rho|\,dt+\frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{|t|<r}|\rho-f(x)|\,dt.$$

Первый член в правой части стремится к $|f(x)-\rho|<\varepsilon/2$ при $r\to 0$, а второй равен $|\rho-f(x)|<\varepsilon/2$. Таким образом, для r, достаточно близких к 0,

$$\frac{1}{\Omega_n r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt<\varepsilon,$$

и, следовательно, почти все точки x из E_n принадлежат лебегову множеству функции f.

Мы покажем, что при выполнении подходящих условий интеграл (1.10) Ф-суммируем к $f(t)$ для всех x, принадлежащих лебегову множеству функции f. Более точно, следующий общий результат вместе с теоремой 1.16 дает нам условия на преобразование Фурье φ функции Φ, при которых это имеет место:

Теорема 1.25. *Пусть $\varphi\in L^1(E_n)$. Введем обозначение $\psi(x)=\operatorname{ess\,sup}_{|t|\geqslant|x|}|\varphi(t)|$ и для произвольного $\varepsilon>0$ положим $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. Если $\psi\in L^1(E_n)$ и $f\in L^p(E_n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, то $\lim_{\varepsilon\to 0}(f*\varphi_\varepsilon)(x)=f(x)\int_E\varphi(t)\,dt$ для всех x, принадлежащих лебегову множеству функции f. В частности, интегралы Пуассона и Гаусса — Вейерштрасса $\int_{E_n}f(t)P(x-t,\ \varepsilon)\,dt$ и $\int_{E_n}f(t)W(x-t,\ \varepsilon)\,dt$ сходятся к $f(x)$ при $\varepsilon\to 0$ для почти всех $x\in E_n$.*

Доказательство. Фиксируем точку x из лебегова множества функции f и выберем $\delta>0$. Тогда мы можем найти такое $\eta>0$, что

$$\text{(i)}\qquad \frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt<\delta,$$

как только $r\leqslant\eta$. Так как $\int_{E_n}\varphi_\varepsilon(t)\,dt=\int_{E_n}\varphi(t)\,dt=a$ для всех $\varepsilon>0$, то

$$|(f*\varphi_\varepsilon)(x)-af(x)|=\left|\int_{E_n}\{f(x-t)-f(x)\}\,\varphi_\varepsilon(t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{|t|<\eta} \{f(x-t) - f(x)\} \varphi_\varepsilon(t)\,dt \right| +$$

$$+ \left| \int_{|t|\geqslant\eta} \{f(x-t) - f(x)\} \varphi_\varepsilon(t)\,dt \right| = I_1 + I_2.$$

Для того чтобы оценить I_1, заметим сначала, что функция $\psi(x)$ *радиальна* (т. е. $\psi(x_1) = \psi(x_2)$ при $|x_1| = |x_2|$), и если мы положим $\psi_0(r) = \psi(x)$, когда $|x| = r$, то ψ_0 будет убывающей функцией r. Таким образом, обозначив через Ω_n объем единичного шара в E_n, получим

$$\frac{\Omega_n(2^n-1)}{2^n} r^n \psi_0(r) \leqslant \int_{r/2\leqslant|x|\leqslant r} \psi(x)\,dx \to 0$$

при $r \to 0$ или при $r \to \infty$. Это означает, что $\lim r^n \psi_0(r) = 0$ при r, стремящемся к 0 или ∞. В частности, существует постоянная A, такая, что $r^n\psi_0(r) \leqslant A$ для $0 < r < \infty$. Обозначим через Σ_{n-1} единичную сферу $\{t' \in E_n;\ |t'| = 1\}$ в E_n и положим $g(r) = \int_{\Sigma_{n-1}} |f(x - rt') - f(x)|\,dt'$, где dt' — элемент площади Σ_{n-1}. Условие (i) тогда эквивалентно условию

$$G(r) = \int_0^r s^{n-1} g(s)\,ds \leqslant \delta r^n \qquad \text{при } r \leqslant \eta.$$

Используя эти обозначения и замечания, получим

$$I_1 \leqslant \int_{|t|<\eta} |f(x-t) - f(x)|\,\varepsilon^{-n}\psi(t/\varepsilon)\,dt = \int_0^\eta r^{n-1} g(r)\,\varepsilon^{-n}\psi_0(r/\varepsilon)\,dr =$$

$$= G(r)\,\varepsilon^{-n}\psi_0(r/\varepsilon)\Big|_0^\eta - \int_0^\eta G(r)\,d(\varepsilon^{-n}\psi_0(r/\varepsilon)) \leqslant$$

$$\leqslant \delta r^n \varepsilon^{-n}\psi\ (r/\varepsilon)\Big|_0^\eta - \int_0^{\eta/\varepsilon} G(\varepsilon s)\,\varepsilon^{-n} d\psi_0(s) \leqslant$$

$$\leqslant \delta A - \int_0^{\eta/\varepsilon} \delta s^n d\psi_0(s) \leqslant \delta\left(A - \int_0^\infty s^n d\psi_0(s)\right).$$

Но $-\int_0^\infty s^n d\psi_0(s) = n\int_0^\infty s^{n-1}\psi_0(s)\,ds = (n/\omega_{n-1})\int_{E_n} \psi(x)\,dx$. Отсюда следует, что существует постоянная B, зависящая только от ψ и такая, что $I_1 \leqslant B\delta$.

Для того чтобы оценить I_2, положим $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon)$ и обозначим через χ_η характеристическую функцию множества всех точек $x \in E_n$, для которых $|x| \geqslant \eta$. Пусть $(1/p) + (1/p') = 1$; тогда

$$I_2 \leqslant \|f\|_p \|\chi_\eta \psi_\varepsilon\|_{p'} + |f(x)| \, \|\chi_\eta \psi_\varepsilon\|_1.$$

Так как

$$\|\chi_\eta \psi_\varepsilon\|_1 = \int\limits_{|x| \geqslant \eta} \psi_\varepsilon(x)\, dx = \int\limits_{|x| \geqslant \eta/\varepsilon} \psi(x)\, dx,$$

то второе слагаемое стремится к 0 вместе с ε. Можно показать, что это же верно и для первого слагаемого: так как $p' = 1 + p'/p$, то применение неравенства Гёльдера дает

$$\|\chi_\eta \psi_\varepsilon\|_{p'} = \left(\int\limits_{|x| \geqslant \eta} [\psi_\varepsilon(x)]^{p'} dx \right)^{1/p'} = \left(\int\limits_{|x| \geqslant \eta} \psi_\varepsilon(x) [\psi_\varepsilon(x)]^{p'/p} dx \right)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant \|\chi_\eta \psi_\varepsilon\|_\infty^{1/p} \|\chi_\eta \psi_\varepsilon\|_1^{1/p'}.$$

Но, как мы уже отмечали выше, $\|\chi_\eta \psi_\varepsilon\|_\infty = \sup\limits_{|x| \geqslant \eta} \psi_\varepsilon(x) = \eta^{-n} (\eta/\varepsilon)^n \psi_0(\eta/\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Мы показали, следовательно, что для достаточно малых ε выражение

$$|(f * \varphi_\varepsilon)(x) - af(x)|$$

ограничено величиной δ, умноженной на некоторую постоянную, зависящую только от ψ. Это, очевидно, доказывает теорему.

Если x есть точка непрерывности функции f, то она заведомо принадлежит ее лебегову множеству. Следовательно, теорема 1.25 выполняется для любой такой точки. Если f непрерывна в точке 0, то из теорем 1.25 и 1.16 следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{E_n} \hat{f}(x) e^{-2\pi\varepsilon|x|} dx = f(0).$$

Если мы еще предположим, что $\hat{f} \geqslant 0$, то из леммы Фату следует, что $\hat{f} \in L^1(E_n)$. Таким образом (см. теорему 1.1 (b)), интеграл (1.10) определяет непрерывную функцию от t, которая совпадает с $f(t)$ почти всюду, в силу следствия 1.22. Таким образом, мы получаем следующий очень полезный результат:

С л е д с т в и е 1.26. *Пусть $f \in L^1(E_n)$ и $\hat{f} \geqslant 0$. Если f непрерывна в точке* 0, *то $\hat{f} \in L^1(E_n)$ и*

$$f(t) = \int\limits_{E_n} \hat{f}(x) e^{2\pi i t \cdot x} dx$$

для почти всех t. В частности,

$$f(0) = \int_{E_n} \hat{f}(x)\, dx.$$

Из этого следствия и теорем 1.13 и 1.14 непосредственно вытекает

Следствие 1.27. (a) $\int_{E_n} W(x, \alpha)\, e^{2\pi i t \cdot x} dx = e^{-4\pi^2\alpha|t|^2}$,

(b) $\int_{E_n} P(x, \alpha)\, e^{2\pi i t \cdot x} dx = e^{-2\pi\alpha|t|}$ *для всех* $\alpha > 0$.

Из теоремы 1.4 и следствий 1.22 и 1.27 немедленно получаем *полугрупповые свойства* ядер Вейерштрасса и Пуассона.

Следствие 1.28. *Пусть α_1 и α_2 — положительные действительные числа; тогда*

(a) $$W(x, \alpha_1 + \alpha_2) = \int_{E_n} W(x - t, \alpha_1)\, W(t, \alpha_2)\, dt,$$

(b) $$P(x, \alpha_1 + \alpha_2) = \int_{E_n} P(x - t, \alpha_1)\, P(t, \alpha_2)\, dt.$$

2. L^2-теория и теорема Планшереля

Интеграл, определяющий преобразование Фурье, для функций из $L^2(E_n)$, вообще говоря, не существует; тем не менее в этом пространстве имеется естественное определение и особенно элегантная теория преобразования Фурье.

Если в дополнение к условию интегрируемости мы предположим, что функция f квадратично интегрируема, то $\hat{f}$ также будет квадратично интегрируемой. Действительно, справедлив следующий основной результат:

Теорема 2.1. *Пусть $f \in L^1 \cap L^2$; тогда $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.*

Доказательство. Пусть $g(x) = \overline{f(-x)}$; тогда, в силу теоремы 1.3, $h = f * g \in L^1(E_n)$ и, в силу теоремы 1.4, $\hat{h} = \hat{f}\hat{g}$. Но $\hat{g} = \overline{\hat{f}}$; значит, $\hat{h} = |\hat{f}|^2$. Применение следствия 1.26 показывает теперь, что $\hat{h} \in L^1(E_n)$ и $h(0) = \int_{E_n} \hat{h}(x)\, dx$ (из неравенства Шварца и из того, что L^2-модуль непрерывн сти $\omega_2(f; \delta)$ стремится к 0 при $\delta \to 0$, непосредственно следует, что h равномерно

непрерывна как свертка двух функций f и g из L^2). Таким образом, имеем

$$\int_{E_n} |\hat{f}|^2 dx = \int_{E_n} \hat{h}(x)\, dx = h(0) = \int_{E_n} f(x)\, g(0-x)\, dx =$$
$$= \int_{E_n} f(x)\, \overline{f(x)}\, dx = \int_{E_n} |f|^2 dx.$$

Эта теорема утверждает, что преобразование Фурье есть ограниченный линейный оператор, определенный на плотном подмножестве $L^1 \cap L^2$ пространства $L^2(E_n)$ (на самом деле изометрический). Следовательно, существует единственное ограниченное расширение $\mathcal{F}$ этого оператора на все пространство L^2. Мы будем называть $\mathcal{F}$ *преобразованием Фурье на* L^2; мы также будем использовать обозначение $\hat{f} = \mathcal{F} f$ для всех $f \in L^2(E_n)$.

В общем случае, если $f \in L^2(E_n)$, то это определение преобразования Фурье дает нам $\hat{f}$ как L^2-предел последовательности $\{\hat{h}_k\}$, где $\{h_k\}$ — произвольная последовательность из $L^1 \cap L^2$, сходящаяся к f по L^2-норме. Удобно выбрать последовательность $\{h_k\}$ так, чтобы $h_k(t)$ равнялась $f(t)$ при $|t| \leqslant k$ и 0 при $|t| > k$. Тогда $\hat{f}$ есть L^2-предел последовательности функций $\hat{h}_k$, определяемых равенствами

$$\hat{h}_k(x) = \int_{|t| \leqslant k} f(t)\, e^{-2\pi i x \cdot t}\, dt = \int_{E_n} h_k(t)\, e^{-2\pi i x \cdot t} dt. \tag{2.2}$$

Линейный изометрический оператор, отображающий $L^2(E_n)$ на себя, называется *унитарным* оператором. Из теоремы 2.1 немедленно следует, что оператор $\mathcal{F}$ изометрический. Более того, $\mathcal{F}$ отображает $L^2(E_n)$ на себя:

Теорема 2.3. *Преобразование Фурье есть унитарный оператор на $L^2(E_n)$.*

Доказательство. Так как оператор $\mathcal{F}$ изометрический, то его область значений есть замкнутое подпространство в $L^2(E_n)$. Если бы это подпространство не совпадало с $L^2(E_n)$, то мы могли бы найти функцию $g \in L^2(E_n)$, такую, что $\int_{E_n} \hat{f} g\, dx = 0$ для всех $f \in L^2(E_n)$ и $\|g\|_2 \neq 0$. Формула умножения (теорема 1.15), очевидно, распространяется на L^2, следовательно, $\int_{E_n} f\hat{g}\, dx = \int_{E_n} \hat{f} g\, dx = 0$ для всех $f \in L^2(E_n)$. Но отсюда следует, что $\hat{g}(x) = 0$ для почти всех $x \in E_n$, в противоречии с тем, что $\|\hat{g}\|_2 = \|g\|_2 \neq 0$.

Теорема 2.3 является главной частью основной теоремы L^2-теории преобразования Фурье:

Теорема 2.4. *Обращение преобразования Фурье $\mathcal{F}^{-1}$ можно получить, полагая $(\mathcal{F}^{-1}\hat{g})(x) = (\mathcal{F}\hat{g})(-x)$ для всех $g \in L^2(E_n)$.*

На теоремы 2.3 и 2.4 обычно ссылаются как на *теорему Планшереля*. Теорема 2.4 следует из того факта, что $\mathcal{F}^{-1}\hat{f}$ можно выразить как L^2-предел последовательности

$$f_k(t) = \int\limits_{|x| \leqslant k} \hat{f}(x)\, e^{2\pi i t \cdot x} dx. \tag{2.5}$$

Прежде всего, мы утверждаем, что это так, когда $\hat{f}$ принадлежит $L^1 \cap L^2$ (плотному подмножеству области значений). В самом деле, нужно только проверить, что это выражение совпадает с $\mathcal{F}^*\hat{f}$ [1]. Но, полагая $\tilde{f}(t) = \int\limits_{E_n} \hat{f}(x)\, e^{2\pi i t \cdot x} dx = \lim\limits_{k \to \infty} f_k(t)$ (в L^2), получаем

$$(g, \tilde{f}) = \int\limits_{E_n} g(t) \left(\overline{\int\limits_{E_n} \hat{f}(x)\, e^{2\pi i t \cdot x} dx} \right) dt =$$

$$= \int\limits_{E_n} \left(\int\limits_{E_n} g(t)\, e^{-2\pi i x \cdot t} dt \right) \overline{\hat{f}(x)}\, dx = (\mathcal{F}g, \hat{f})$$

для всех $g \in L^1 \cap L^2$. Таким образом, $(g, \tilde{f}) = (\mathcal{F}g, \mathcal{F}f) = (g, f)$ для всех $g \in L^1 \cap L^2$; следовательно, $\tilde{f} = f$. Общий случай теперь доказывается теми же рассуждениями, которые были использованы при доказательстве (2.2).

Итак, мы видим, что задача обращения преобразования Фурье имеет в L^2 очень простое и элегантное решение. С учетом теории, развитой в предыдущем параграфе, естественно спросить: существует ли решение этой задачи, использующее понятие суммируемости? Например, поскольку $e^{-\delta |x|}$ квадратично интегрируема как функция x, определены средние Абеля интеграла (1.10). Верно ли, что они сходятся к f (в L^2 или почти всюду)? Ответ «да» немедленно следует из теорем 1.18 и 1.25, как только тождество из теоремы 1.16 установлено для $f \in L^2(E_n)$. Но последнее можно доказать тем же

---

[1] Мы рассматриваем $L^2(E_n)$ как гильбертово пространство со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{E_n} f\bar{g}\,dx$ и предполагаем, что читатель знаком с тем фактом, что если T — унитарный оператор, то T^{-1} совпадает с *сопряженным* оператором T^* (т. е. оператором, удовлетворяющим равенству $(Tf, g) = (f, T^*g)$ для всех f и g из $L^2(E_n)$). Отсюда следует, что T сохраняет скалярное произведение: $(Tf, Tg) = (f, g)$.

способом, что и теорему 1.16, используя L^2-расширение формулы умножения (теорема 1.15).

Имея определение преобразования Фурье для функций из $L^1(E_n)$ и функций из $L^2(E_n)$, мы можем легко распространить его на класс $L^1(E_n)+L^2(E_n)$, состоящий из всех функций $f = f_1+f_2$, где $f_1 \in L^1(E_n)$ и $f_2 \in L^2(E_n)$. Мы сделаем это, положив $(f_1+f_2)\hat{} = \hat{f}_1+\hat{f}_2$. Если $g_1+g_2=f_1+f_2$, где $g_i \in L^i(E_n)$, $i = 1, 2$, то $g_1-f_1=f_2-g_2 \in L^1 \cap L^2$. Так как эти два определения преобразования Фурье совпадают на $L^1 \cap L^2$, то $\hat{g}_1-\hat{f}_1 = \hat{f}_2-\hat{g}_2$. Таким образом, $\hat{f}_1+\hat{f}_2=\hat{g}_1+\hat{g}_2$. Отсюда следует, что наше преобразование Фурье определено на $L^1(E_n)+L^2(E_n)$. Поскольку последнее, очевидно, содержит все пространства $L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, преобразование Фурье определено для всех $f \in L^p(E_n)$. Легко проверить, что задача обращения преобразования Фурье также может быть решена в этом случае в терминах средних Абеля или Гаусса. Аналогично, теорема 1.4 имеет следующее обобщение:

Т е о р е м а 2.6. *Пусть* $f \in L^1(E_n)$ *и* $g \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$; *тогда* $h = f * g$ *принадлежит* $L^p(E_n)$ (*см. теорему* 1.3) *и*

$$\hat{h}(x) = \hat{f}(x)\,\hat{g}(x)$$

для почти всех $x \in E_n$.

В следующем параграфе мы существенно расширим определение преобразования Фурье. Мы покажем, что это расширение согласуется с тем, которое мы только что привели, если применить его к пространствам $L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$.

3. Класс обобщенных функций медленного роста

Основная идея теории обобщенных функций состоит в рассмотрении линейных функционалов на некотором пространстве «регулярных» функций — так называемых «основных функций». Пространство основных функций предполагается «хорошим» по отношению к изученным выше операциям (дифференцирование, преобразование Фурье, свертка, сдвиги и т. д.), и это отражается в свойствах обобщенных функций. Следующие рассуждения естественно приведут нас к определению такого пространства основных функций. Предположим, что мы хотим, чтобы перечисленные операции были определены на некотором функциональном пространстве $\mathcal{S}$ и сохраняли его. Тогда оно должно состоять из бесконечно дифференцируемых функций и ввиду (1.9) (i) каждая функция из $\mathcal{S}$ после умножения на произвольный полином обязана оставаться

в $\mathcal{S}$. Поэтому мы даем следующее определение: пространство $\mathcal{S}$ *основных функций* состоит из всех функций φ класса C^∞ на E_n (т. е. все частные производные φ существуют и непрерывны), таких, что

$$\sup_{x \in E_n} |x^\alpha (D^\beta \varphi)(x)| < \infty \tag{3.1}$$

для всех мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ (мы используем обозначения, введенные в (1.9)). Например, функция $\varphi(x) = e^{-\delta|x|^2}$, $\delta > 0$, принадлежит $\mathcal{S}$; с другой стороны, функция $\varphi(x) = e^{-\delta|x|}$ не дифференцируема в точке 0 и, следовательно, не принадлежит $\mathcal{S}$. Пространство $\mathcal{S}$ содержит пространство $\mathcal{D}$ всех функций класса C^∞ на E_n с компактным носителем.

Не сразу ясно, что $\mathcal{D}$ непусто. Для того чтобы найти некоторую функцию в $\mathcal{D}$, рассмотрим функцию f, значения которой $f(t)$ равны $e^{-1/t}$ при $t > 0$ и нулю при $t \leqslant 0$. Тогда $f \in C^\infty$ и ограничена вместе со всеми своими производными. Положим $\varphi(t) = f(1+t) f(1-t)$; тогда $\varphi(t)$ равна $e^{-2/(1-t^2)}$ при $|t| < 1$, равна 0 при $|t| \geqslant 1$ и, очевидно, принадлежит $\mathcal{D} = \mathcal{D}(E_1)$. Легко получить n-мерные варианты функции φ:

a) Для $x \in E_n$ положим $\psi(x) = \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n)$; тогда $\psi \in \mathcal{D} = \mathcal{D}(E_n)$.

b) Для $x \in E_n$ положим $\psi(x) = e^{-2/(1-|x|^2)}$ при $|x| < 1$ и $\psi(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$; тогда $\psi \in \mathcal{D} = \mathcal{D}(E_n)$.

c) Пусть $\eta \in C^\infty$ и ψ — функция из (b); тогда $\psi(\varepsilon x)\eta(x)$ определяет функцию из $\mathcal{D}(E_n)$ и, более того, $\varepsilon^2\psi(\varepsilon x)\eta(x) \to \eta(x)$ при $\varepsilon \to 0$ (см. (3.9) ниже).

Заметим, что умножение на степени $x_1, \ldots, x_n$ и дифференцирование в (3.1) можно поменять местами, т. е. $\varphi \in \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in C^\infty$ и $\sup\limits_{x \in E_n} |D^\beta (x^\alpha \varphi(x))| < \infty$ для всех мультииндексов α и β. Отсюда следует, что если P есть полином от n переменных и $\varphi \in \mathcal{S}$, то $P(x)\varphi(x)$ и $P(D)\varphi(x)$ также принадлежат $\mathcal{S}$.

Пространства C_0 и $L^p(E_n)$, $1 \leqslant p < \infty$, содержат $\mathcal{S}$ в качестве плотного подпространства, и то же самое верно относительно $\mathcal{D}$. Норма функции $\varphi \in \mathcal{S}$ в пространстве L^p ограничена линейной комбинацией L^∞-норм членов вида $x^\alpha\varphi(x)$. В этом можно убедиться таким образом: положим $A = \|\varphi\|_\infty$, $B = \sup\limits_{x \in E_n} |x|^{2n} |\varphi(x)|$ ($B < \infty$ в силу (3.1)); тогда для $1 \leqslant p < \infty$ имеем

$$\left(\int\limits_{E_n} |\varphi(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_{|x| \leqslant 1} |\varphi(x)|^p \, dx\right)^{1/p} + \left(\int\limits_{|x|>1} |\varphi(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant A\left(\int\limits_{|x|\leqslant 1} 1\cdot dx\right)^{1/p} + B\left(\int\limits_{|x|>1} |x|^{-2np}\,dx\right)^{1/p} =$$

$$= A\left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\right)^{1/p} + B\left(\frac{\omega_{n-1}}{(2p-1)\,n}\right)^{1/p}.$$

Отсюда следует, что коэффициенты и показатели степени α, использующиеся в линейной комбинации L^∞-норм, мажорирующей $\|\varphi\|_p$, не зависят от φ.

Из (1.9) (ii) легко следует, что $\hat{\varphi}\in C^\infty$ для всех $\varphi\in\mathcal{S}$. Объединяя это с частью (i), получаем, что $\hat{\varphi}\in\mathcal{S}$. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 3.2. *Пусть* $\varphi\in\mathcal{S}$; *тогда* $\hat{\varphi}\in\mathcal{S}$.

В действительности уже из рассуждений § 1 по поводу обращения преобразования Фурье видно, что это преобразование должно быть взаимно однозначным отображением $\mathcal{S}$ на $\mathcal{S}$.

Если φ и ψ принадлежат пространству $\mathcal{S}$, то, по теореме 3.2, ему принадлежат $\hat{\varphi}$ и $\hat{\psi}$, а следовательно, и $\hat{\varphi}\hat{\psi}$. Так как $(\varphi*\psi)\hat{} = \hat{\varphi}\hat{\psi}$, то применением обратного преобразования Фурье получается

Т е о р е м а 3.3. *Пусть* φ *и* ψ *принадлежат* $\mathcal{S}$; *тогда* $\varphi*\psi$ *также принадлежит* $\mathcal{S}$.

Введем теперь метрику на $\mathcal{S}$ так, чтобы $\mathcal{S}$ стало топологическим векторным пространством. С этой целью определим счетное семейство норм $\{\rho_{\alpha\beta}\}$, помеченных упорядоченными парами мультииндексов (α, β). Для такой пары положим, учитывая (3.1),

$$\rho_{\alpha\beta}(\varphi) = \sup_{x\in E_n} |x^\alpha D^\beta\varphi(x)|$$

для $\varphi\in\mathcal{S}$. Тогда $d'_{\alpha\beta}(\varphi, \psi) = \rho_{\alpha\beta}(\varphi-\psi)$ будет метрикой на $\mathcal{S}$. Пусть $d'_1, d'_2, \ldots$ — некоторое упорядочение этих метрик и $d_n = d'_n/(1+d'_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда d_n — метрика, эквивалентная d'_n (т. е. эти метрики определяют одну и ту же топологию на $\mathcal{S}$). Далее, $d_n\leqslant 1$. Следовательно, $d = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}d_n$ есть метрика на $\mathcal{S}$. Эта метрика определяет топологию на $\mathcal{S}$. Ясно, что $\varphi_k\to\varphi$ в метрике d тогда и только тогда, когда $\varphi_k\to\varphi$ в каждой из d_n (при $k\to\infty$). Отсюда следует, что операции векторного пространства $(\varphi, \psi)\to\varphi+\psi$ и $(a, \varphi)\to a\varphi$ (a — комплексное число) непрерывны; следовательно, $(\mathcal{S}, d)$ — топологическое векторное пространство.

Приведем несколько легко устанавливаемых свойств пространства $\mathscr{S}$ и его топологии:

(3.4) *отображение* $\varphi(x) \to x^\alpha D^\beta \varphi(x)$ *непрерывно*;

(3.5) *если* $\varphi \in \mathscr{S}$, *то* $\lim\limits_{h\to 0} \tau_h\varphi = \varphi$;

(3.6) *пусть* $\varphi \in \mathscr{S}$ *и* $h = (0, \ldots, h_i, \ldots, 0)$ *лежит на* i-*й координатной оси; тогда выражение* $[\varphi - \tau_h\varphi]/h_i$ *стремится к* $\partial\varphi/\partial x_i$ *при* $|h| \to 0$;

(3.7) $\mathscr{S}$ — *полное метрическое пространство;*

(3.8) *преобразование Фурье есть гомеоморфизм пространства* $\mathscr{S}$ *на себя;*

(3.9) $\mathscr{D}$ *есть плотное подмножество в* $\mathscr{S}$;

(3.10) $\mathscr{S}$ *сепарабельно.*

Совокупность $\mathscr{S}'$ всех линейных непрерывных функционалов на $\mathscr{S}$ называется *пространством обобщенных функций медленного роста*. Приведем несколько примеров обобщенных функций медленного роста.

(1) Пусть $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$; определим $L = L_f$ равенством

$$L(\varphi) = L_f(\varphi) = \int\limits_{E_n} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

для $\varphi \in \mathscr{S}$. Ясно, что L есть линейный функционал на $\mathscr{S}$. Поэтому, чтобы показать, что он непрерывен, достаточно показать, что он непрерывен в 0. Предположим, что $\varphi_k \to 0$ (в $\mathscr{S}$) при $k \to \infty$. Мы видели, что для любого $q \geqslant 1$ норма $\|\varphi_k\|_q$ мажорируется конечной линейной комбинацией L^∞-норм членов вида $x^\alpha\varphi_k(x)$ (коэффициенты этих линейных комбинаций и показатели степени α зависят только от n и q и не зависят от φ_k). Это означает, что $\|\varphi_k\|_q$ мажорируется конечной линейной комбинацией норм $\rho_{\alpha 0}(\varphi_k)$. Следовательно, $\|\varphi_k\|_q \to 0$ при $k \to \infty$. Выберем q так, чтобы $1/p + 1/q = 1$; тогда из неравенства Гёльдера следует, что $|L(\varphi_k)| \leqslant \|f\|_p \|\varphi_k\|_q \to 0$ при $k \to \infty$. Таким образом, $L \in \mathscr{S}'$.

(2) Пусть μ — конечная борелевская мера; линейный функционал $L = L_\mu$, определенный равенством

$$L(\varphi) = L_\mu(\varphi) = \int\limits_{E_n} \varphi(x)\,d\mu(x)$$

для $\varphi \in \mathscr{S}$, является обобщенной функцией медленного роста (выбрав $q = \infty$, можно свести доказательство к рассуждениям первого примера).

(3) Измеримая функция f, такая, что $f(x)/(1+|x^2|)^k$ принадлежит $L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (для некоторого положительного целого k), называется L^p-*функцией медленного роста* (когда $p = \infty$, такая

функция часто называется также *медленно растущей функцией*). Для каждой такой функции $L(\varphi) = \int\limits_{E_n} f(x)\varphi(x)\,dx$, $\varphi \in \mathscr{S}$, определяет элемент из $\mathscr{S}'$. В этом можно убедиться, записав

$$L(\varphi) = \int\limits_{E_n} \{f(x)/(1+|x|^2)^k\}\{(1+|x|^2)^k \varphi(x)\}\,dx$$

и заметив, что отображение $\varphi(x) \to (1+|x|^2)^k \varphi(x)$ непрерывно в $\mathscr{S}$; результат следует тогда из примера (1).

(4) *Мера медленного роста* есть борелевская мера μ, такая, что

$$\int\limits_{E_n} (1+|x|^2)^{-k}\,d\mu(x) < \infty$$

для некоторого целого k. Так же как и в примере (3), можно показать, что $L(\varphi) = \int\limits_{E_n} \varphi(x)\,d\mu(x)$ определяет обобщенную функцию медленного роста.

(5) Фиксируем $x_0 \in E_n$ и мультииндекс β. Из непрерывности нормы $\rho_{\alpha\beta}$ в $\mathscr{S}$ непосредственно следует, что $L(\varphi) = D^\beta \varphi(x_0)$ для $\varphi \in \mathscr{S}$ определяет обобщенную функцию медленного роста. Частным случаем является *δ-функция Дирака:* $L(\varphi) = \varphi(0)$. Эта обобщенная функция, однако, может быть получена также из меры медленного роста, имеющей массу 1, сосредоточенную в 0 (пример (4)). Когда $D^\beta = \partial/\partial x_i$ (т. е. $L(\varphi) = (\partial\varphi/\partial x_i)(0)$), мы получаем пример обобщенной функции медленного роста, не являющейся частным случаем ни одного из четырех ранее рассмотренных типов.

Обобщенные функции примера (1) (или в более общем случае примера (3)) называются *регулярными обобщенными функциями.* Аналогично, примеры (2) и (4) определяют обобщенные функции, которые называются *мерами.* Мы будем писать в этих случаях f и μ вместо L_f и L_μ. Эти функции f и меры μ можно рассматривать как вложенные в $\mathscr{S}'$. Если мы наделим $\mathscr{S}'$ слабейшей топологией, в которой линейные функционалы $L \to L(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{S}$, непрерывны, то легко видеть, что пространства $L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, непрерывно вкладываются в $\mathscr{S}'$. То же самое верно и для пространства всех конечных борелевских мер на E_n (которое является банаховым пространством с нормой $\|\mu\| = \int\limits_{E_n} d|\mu|$).

Существует простая и важная характеристика обобщенных функций медленного роста:

Теорема 3.11. *Линейный функционал L на $\mathscr{S}$ является обобщенной функцией медленного роста тогда и только тогда,*

когда существуют постоянная $C > 0$ и целые числа m и l, такие, что

$$|L(\varphi)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant l, |\beta| \leqslant m} \rho_{\alpha\beta}(\varphi)$$

для всех $\varphi \in \mathscr{S}$.

Доказательство. Ясно, что из существования C, m и l следует непрерывность L.

Предположим, что L непрерывен. Из определения метрики следует, что базис окрестностей нуля в $\mathscr{S}$ состоит из множеств $N_{\varepsilon,l,m} = \{\varphi; \sum_{|\alpha| \leqslant l, |\beta| \leqslant m} \rho_{\alpha\beta}(\varphi) < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$, а l и m — целые числа (так как в топологии, индуцированной этой системой окрестностей и их сдвигов, $\varphi_k \to \varphi$ при $k \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\rho_{\alpha\beta}(\varphi_k - \varphi) \to 0$ для всех (α, β)). Значит, существует множество $N_{\varepsilon,l,m}$, такое, что $|L(\varphi)| \leqslant 1$ для всех $\varphi \in N_{\varepsilon,l,m}$. Положим $\|\varphi\| = \sum_{|\alpha| \leqslant l, |\beta| \leqslant m} \rho_{\alpha\beta}(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathscr{S}$. Если $0 < \bar{\varepsilon} < \varepsilon$, то $\psi = (\bar{\varepsilon}/\|\varphi\|)\varphi \in N_{\varepsilon,l,m}$ (при $\varphi \neq 0$). В силу линейности L, следовательно, получаем

$$(\bar{\varepsilon}/\|\varphi\|)\,|L(\varphi)| \leqslant |L(\psi)| \leqslant 1.$$

Но это и есть искомое неравенство с $C = 1/\bar{\varepsilon}$.

Покажем теперь, что некоторые важные операции анализа (дифференцирование, свертка, преобразование Фурье) могут быть определены на $\mathscr{S}'$. Начнем с определения свертки обобщенной функции с основной функцией.

Для этого дадим следующее определение: пусть g — произвольная функция на E_n; назовем ее *отражением* $\tilde{g}$ функцию $\tilde{g}(x) = g(-x)$. Прямое применение теоремы Фубини показывает, что для u, φ и ψ из $\mathscr{S}$ мы имеем

$$\int_{E_n} (u * \varphi)(x)\,\psi(x)\,dx = \int_{E_n} u(x)\,(\tilde{\varphi} * \psi)(x)\,dx.$$

Отображения $\psi \to \int_{E_n} (u * \varphi)(x)\,\psi(x)\,dx$ и $\theta \to \int_{E_n} u(x)\,\theta(x)\,dx$ суть линейные функционалы на $\mathscr{S}$. Если мы обозначим эти функционалы $u * \varphi$ и u, то последнее равенство можно переписать в виде

$$(u * \varphi)(\psi) = u(\tilde{\varphi} * \psi). \tag{3.12}$$

Если $u \in \mathscr{S}'$, а $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$, то правая часть (3.12) определена, так как $\tilde{\varphi} * \psi \in \mathscr{S}$. Более того, отображение $\psi \to u(\tilde{\varphi} * \psi)$. будучи суперпозицией двух непрерывных функций, непрерывно,

Таким образом, *свертку* $u * \varphi$ *обобщенной функции* u *с основной функцией* φ можно определить равенством (3.12).

Как легко показать, эта свертка ассоциативна в том смысле, что $(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi)$ для всех $u \in \mathscr{S}'$ и $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$. Следующее утверждение дает описание только что введенной свертки.

Теорема 3.13. *Пусть* $u \in \mathscr{S}'$ *и* $\varphi \in \mathscr{S}$; *тогда свертка* $u * \varphi$ *есть регулярная обобщенная функция* f, *значения которой при* $x \in E_n$ *равны* $f(x) = u(\tau_x \tilde{\varphi})$, *где* τ_x — *оператор сдвига на* x. *Более того,* f *принадлежит классу* C^∞ *и является медленно растущей функцией вместе со всеми своими производными.*

Доказательство. Сначала покажем, что f есть медленно растущая C^∞-функция. Пусть $h = (0, \ldots, h_j, \ldots, 0)$; тогда, согласно (3.6), $[\tau_{x+h}\tilde{\varphi} - \tau_x\tilde{\varphi}]/h_j \to -\tau_x \partial\tilde{\varphi}/\partial x_j$ при $|h| \to 0$ в топологии $\mathscr{S}$. Отсюда, в силу непрерывности u, следует, что $[f(x+h) - f(x)]/h_j = u([\tau_{x+h}\tilde{\varphi} - \tau_x\tilde{\varphi}]/h_j) \to u[-\tau_x(\partial\tilde{\varphi}/\partial x_j)]$ при $|h| \to 0$. Это вместе с (3.5) показывает, что f имеет непрерывные первые частные производные. Так как $\partial\tilde{\varphi}/\partial x_j \in \mathscr{S}$, то мы можем повторить эти рассуждения и показать, что $D^\beta f$ существует и непрерывна для любого мультииндекса β. Заметим, что при этом мы получим равенство $(D^\beta f)(x) = (-1)^{|\beta|} u(\tau_x D^\beta\tilde{\varphi})$, где $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n$. Так как $D^\beta\tilde{\varphi} \in \mathscr{S}$, то если f — медленно растущая функция, это же верно для всех ее производных. Тот факт, что f — медленно растущая функция, является, однако, простым следствием теоремы 3.11: существуют $C > 0$ и целые числа m и l, такие, что

$$|f(x)| = |u(\tau_x\tilde{\varphi})| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant l, |\beta| \leqslant m} \rho_{\alpha\beta}(\tau_x\tilde{\varphi}).$$

Но $\rho_{\alpha\beta}(\tau_x\tilde{\varphi}) = \sup\limits_{w \in E_n} |w^\alpha (D^\beta\tilde{\varphi})(w - x)| = \sup\limits_{w \in E_n} |(w + x)^\alpha (D^\beta\tilde{\varphi})(w)|$, а последнее выражение, очевидно, ограничено полиномом по x.

Для того чтобы показать, что $u * \varphi$ есть регулярная обобщенная функция f, мы должны показать, что $(u * \varphi)(\psi) = \int\limits_{E_n} \psi(t) f(t)\, dt$. Но

$$(u * \varphi)(\psi) = u(\tilde{\varphi} * \psi) = u\left(\int\limits_{E_n} \tilde{\varphi}(x - t)\psi(t)\, dt\right) =$$

$$= u\left(\int\limits_{E_n} (\tau_t\tilde{\varphi})(x)\psi(t)\, dt\right).$$

С другой стороны, легко показать, что суммы Римана последнего интеграла сходятся в топологии $\mathcal{S}$. Таким образом,

$$u\left(\int_{E_n} (\tau_t\tilde{\varphi})(x)\,\psi(t)\,dt\right) = \int_{E_n} u(\tau_t\tilde{\varphi})\,\psi(t)\,dt = \int_{E_n} f(t)\,\psi(t)\,dt,$$

так как u непрерывна и линейна. Это и есть искомый результат.

Теперь мы изучим дифференцирование в классе $\mathcal{S}'$. Сначала заметим, что интегрирование по частям дает

$$\int_{E_n} (D^\beta u)(x)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\beta|}\int_{E_n} u(x)\,(D^\beta\varphi)(x)\,dx$$

для всех $u, \varphi \in \mathcal{S}$. Отображения $\varphi \to \int_{E_n} (D^\beta u)(x)\,\varphi(x)\,dx$ и $\psi \to \int_{E_n} u(x)\,\psi(x)\,dx$ определяют непрерывные линейные функционалы на $\mathcal{S}$. Обозначив их $(D^\beta u)$ и u, перепишем последнее равенство в виде

$$(D^\beta u)(\varphi) = (-1)^{|\beta|}\,u(D^\beta\varphi). \tag{3.14}$$

Но правая часть определена для всех $u \in \mathcal{S}'$ и $\varphi \in \mathcal{S}$. Далее, отображение $\varphi \to u(D^\beta\varphi)$ непрерывно на $\mathcal{S}$ (как суперпозиция двух непрерывных функций). Следовательно, мы можем определить *частную производную* $D^\beta u$ *обобщенной функции* u посредством равенства (3.14). Очевидно, что тогда $D^\beta u \in \mathcal{S}'$.

Аналогичным образом, рассмотрев сначала $u, \varphi \in \mathcal{S}$, мы можем мотивировать следующие два определения. *Оператор сдвига* τ_h определим на $\mathcal{S}'$, положив $\tau_h u$ для $u \in \mathcal{S}'$ равным непрерывному линейному функционалу $\tau_h u$, значения которого даются формулой $(\tau_h u)(\varphi) = u(\tau_{-h}\varphi)$. Положив $\tilde{u}(\varphi) = u(\tilde{\varphi})$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}$, получим *отражение* $\tilde{u}$ *обобщенной функции* u.

Из формулы умножения (теорема 1.15) следует, что $u(\hat{\varphi}) = \int_{E_n} u(x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx = \int_{E_n} \hat{u}(x)\,\varphi(x)\,dx = \hat{u}(\varphi)$ для всех $u, \varphi \in \mathcal{S}$. Поэтому определим *преобразование Фурье* $\hat{u}$ *обобщенной функции* u как непрерывный линейный функционал на $\mathcal{S}$, значения которого даются формулой

$$\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi}). \tag{3.15}$$

Заметим, что если регулярная обобщенная функция f принадлежит $L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, то ее преобразование Фурье совпадает с функцией $\hat{f}$, определенной в конце § 2[1]. Легко проверить, что введен-

[1] Для случая $p > 2$ см. (4.13) ниже.

ное преобразование Фурье есть изоморфизм топологического векторного пространства $\mathcal{S}'$ на себя.

Установив эти факты теории обобщенных функций, мы теперь применим их к изучению основного класса линейных операторов, возникающих в гармоническом анализе: класса операторов, коммутирующих со сдвигами. Хотя проблема описания таких операторов в случае произвольного пространства $L^p(E_n)$ остается открытой, она, как мы увидим ниже, может быть решена в некоторых важных частных случаях.

Пусть B — оператор, отображающий некоторое линейное пространство V функций на E_n в другое такое пространство W. Мы скажем, что *B коммутирует со сдвигами,* если $\tau_h B = B\tau_h$ для всех $h \in E_n$. Приведем пример такого оператора. Фиксируем $f \in L^p(E_n)$ и положим $Bg = f * g$ для $g \in L^1(E_n)$. Согласно теореме 1.3, B — ограниченный линейный оператор, отображающий $L^1(E_n)$ в $L^p(E_n)$ (имеем $\|B\| \leqslant \|f\|_p$), а замена переменных показывает, что $\tau_h(Bg) = B(\tau_h g)$ для всех $g \in L^1(E_n)$. Следующий результат показывает, что «все» ограниченные операторы, коммутирующие со сдвигами, имеют подобный «сверточный вид».

Теорема 3.16. *Пусть $B: L^p(E_n) \to L^q(E_n)$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, — линейный ограниченный оператор, коммутирующий со сдвигами; тогда существует единственная обобщенная функция медленного роста u, такая, что $B\varphi = u * \varphi$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}$*[1].

Мы покажем, что справедливость этой теоремы легко вытекает из следующей леммы:

Лемма 3.17. *Пусть функция $f \in L^p(E_n)$ имеет производные по L^p-норме всех порядков $\leqslant n+1$; тогда она почти всюду совпадает с непрерывной функцией g, удовлетворяющей оценке*

$$|g(0)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} \|D^\alpha f\|_p,$$

где C зависит только от размерности n и показателя p.

---

[1] Рассмотрим для простоты случай $n = 1$. Беря подходящую сумму Римана, можно убедиться, что если u — хорошая функция, то $(B\varphi)(x)$ аппроксимируется линейной комбинацией вида $\sum_{k=1}^{n} u(t_k)(t_k - t_{k-1})\varphi(x - t_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi(x - t_k)$. Таким образом, B аппроксимируется конечной линейной комбинацией операторов сдвига. В некотором смысле, уточняемом теоремой 3.16, все ограниченные линейные операторы, коммутирующие со сдвигами, могут быть аппроксимированы подобным образом.

Доказательство. Пусть $x=(x_1, \ldots, x_n) \in E_n$. Тогда существует постоянная $C' = C'_n$, такая, что

$$(1+|x|^2)^{(n+1)/2} \leqslant (1+|x_1|+\cdots+|x_n|)^{n+1} \leqslant C' \sum_{|\alpha|\leqslant n+1} |x^\alpha|.$$

Предположим сначала, что $p=1$. Тогда, согласно (1.9) (i) и теореме 1.1 (a),

$$\begin{aligned} |\hat f(x)| &\leqslant C'(1+|x|^2)^{-[(n+1)/2]} \sum_{|\alpha|\leqslant n+1} |x^\alpha|\,|\hat f(x)| = \\ &= C'(1+|x|^2)^{-[(n+1)/2]} \sum_{|\alpha|\leqslant n+1} |((2\pi)^{-|\alpha|} D^\alpha f)\hat{\ } (x)| \leqslant \\ &\leqslant C''(1+|x|^2)^{-[(n+1)/2]} \sum_{|\alpha|\leqslant n+1} \|D^\alpha f\|_1. \end{aligned}$$

Так как $(1+|x|^2)^{-[(n+1)/2]}$ — интегрируемая на E_n функция, то отсюда следует, что $\hat f \in L^1(E_n)$ и

$$\|\hat f\|_1 \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant n+1} \|D^\alpha f\|_1,$$

где $C = C'' \int\limits_{E_n} (1+|x|^2)^{-[(n+1)/2]} dx$. Таким образом, в силу следствия 1.21 f почти всюду совпадает с непрерывной функцией g, а в силу теоремы 1.1 (a)

$$|g(0)| \leqslant \|f\|_\infty \leqslant \|\hat f\|_1 \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant n+1} \|D^\alpha f\|_1.$$

Пусть теперь $p>1$. Выберем такую функцию $\varphi \in C^\infty$, что $\varphi(x)=1$ при $|x|\leqslant 1$, $\varphi(x)=0$ при $|x|>2$. Тогда φf удовлетворяет условиям леммы для $p=1$. Таким образом, φf почти всюду совпадает с непрерывной функцией h, такой, что

$$|h(0)| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant n+1} \|D^\alpha(\varphi f)\|_1.$$

Так как $D^\alpha(\varphi f) = \sum\limits_{\mu+\nu=\alpha} C^{\mu\nu} (D^\mu f)(D^\nu \varphi)$, то

$$\begin{aligned} \|D^\alpha(\varphi f)\|_1 &\leqslant \int\limits_{|x|\leqslant 2} \sum_{\mu+\nu=\alpha} C^{\mu\nu} |D^\mu f|\,|D^\nu \varphi|\, dx \leqslant \\ &\leqslant \sum_{\mu+\nu=\alpha} C \{\sup_{|x|\leqslant 2} (D^\nu\varphi)(x)\} \int\limits_{|x|\leqslant 2} |(D^\mu f)(x)|\, dx \leqslant \\ &\leqslant A \sum_{|\nu|\leqslant|\alpha|} \int\limits_{|x|\leqslant 2} |(D^\nu f)(x)|\, dx \leqslant AB \sum_{|\nu|\leqslant|\alpha|} \|D^\nu f\|_p, \end{aligned}$$

где $A \geqslant \|D^{\nu}\varphi\|_{\infty}$, $|\nu| \leqslant |\alpha|$, а B зависит только от p и n. Таким образом, мы можем найти такую постоянную K, что

$$|h(0)| \leqslant K \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} \|D^{\alpha} f\|_p.$$

Так как $\varphi(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$, то $f(x)$ совпадает с непрерывной функцией g почти всюду в шаре единичного радиуса с центром в 0; кроме того,

$$|g(0)| = |h(0)| \leqslant K \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} \|D^{\alpha} f\|_p.$$

Но подобными рассуждениями, выбирая подходящую функцию φ, можно показать, что f совпадает с непрерывной функцией почти всюду в шаре произвольного радиуса с центром в 0. Это доказывает лемму.

Обратимся теперь к доказательству теоремы 3.16. Заметим сначала, что если $\varphi \in \mathcal{S}$, то $B\varphi$ имеет производные по L^q-норме всех порядков. Действительно, если $h = (0, \ldots, h_j, \ldots, 0)$ лежит на j-й оси координат, то $(\tau_h(B\varphi) - B\varphi)/h_j = (B(\tau_h\varphi) - B\varphi)/h_j = B((\tau_h\varphi - \varphi)/h_j)$. Так как выражение $(\tau_h\varphi - \varphi)/h_j$ сходится к $-\varphi_j = -\partial\varphi/\partial x_j$ в топологии $\mathcal{S}$, то оно сходится к этой функции и по L^p-норме. Но B — ограниченный оператор из L^p в L^q; следовательно, $(\tau_h(B\varphi) - B\varphi)/h_j$ сходится к $-\partial(B\varphi)/\partial x_j = -B\varphi_j$ по L^q-норме. Тот факт, что $B\varphi$ имеет производные по L^q-норме всех порядков, доказывается повторением приведенных рассуждений. Ясно, что $B(D^{\alpha}\varphi) = D^{\alpha}(B\varphi)$ для всех мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Следовательно, согласно лемме 3.17, $B\varphi$ почти всюду совпадает с непрерывной функцией g_{φ}, удовлетворяющей оценке

$$|g_{\varphi}(0)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} \|D^{\alpha}(B\varphi)\|_q = C \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} \|B(D^{\alpha}\varphi)\|_q \leqslant \|B\| C \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} \|D^{\alpha}\varphi\|_p.$$

Последнее неравенство показывает, что отображение $\varphi \to g_{\varphi}(0)$ есть непрерывный линейный функционал u_1 на $\mathcal{S}$ (это следует из теореомы 3.11 и замечания, сделанного в начале этого параграфа, что L^p-норма функции $\psi \in \mathcal{S}$ ограничена линейной комбинацией L^{∞}-норм членов вида $x^{\alpha}\psi(x)$). Мы утверждаем, что $u = \tilde{u}_1$ и есть тот линейный функционал, который мы ищем. Действительно, если $\varphi \in \mathcal{S}$, то по теореме 3.13 получаем $(u * \varphi)(x) = u(\tau_x\tilde{\varphi}) = u([\tau_{-x}\varphi]^{\sim}) = \tilde{u}(\tau_{-x}\varphi) = u_1(\tau_{-x}\varphi) = (B(\tau_{-x}\varphi))(0) = (\tau_{-x}B\varphi)(0) = (B\varphi)(x)$ [1]. Заметим, что из этого

[1] Мы отождествляем $B(\tau_{-x}\varphi)$ с непрерывной функцией $g_{\tau_{-x}\varphi}$, с которой $B(\tau_{-x}\varphi)$ совпадает почти всюду.

построения следует единственность обобщенной функции u. Тем самым теорема доказана.

Этот результат в сочетании с теоремой 3.13 показывает, что $B\varphi$, $\varphi \in \mathcal{S}$, почти всюду совпадает с C^∞-функцией, медленно растущей вместе со всеми своими производными.

Обозначим (L^p, L^q) множество всех обобщенных функций u медленного роста, для которых существует такое $A > 0$, что $\| u * \varphi \|_q \leqslant A \| \varphi \|_p$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}$. Теорема 3.16 показывает, что существует взаимно однозначное соответствие между этим множеством и ограниченными линейными операторами из L^p в L^q, коммутирующими со сдвигами (то что оператор $\varphi \to u * \varphi$ коммутирует со сдвигами, легко увидеть из теоремы 3.13). При $p = q = 2$ можно дать очень простую характеристику этого множества обобщенных функций.

Теорема 3.18. *Обобщенная функция u принадлежит (L^2, L^2) тогда и только тогда, когда существует функция $b \in L^\infty(E_n)$, такая, что $\hat{u} = b$. В этом случае $\| b \|_\infty$ есть норма оператора B: $L^2 \cap \mathcal{S} \to L^2$, определенного равенством $B\varphi = u * \varphi$; кроме того, $(u * \varphi)\hat{} = \hat{u}\hat{\varphi}$.*

Доказательство. Если $v \in \mathcal{S}'$ и $\psi \in \mathcal{S}$, то мы полагаем *произведение* $v\psi$ равным элементу из $\mathcal{S}'$, такому, что $(v\psi)(\varphi) = v(\psi\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}$. Определив таким образом произведение обобщенной функции на основную, заметим сначала, что при любых $u \in \mathcal{S}'$ и $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\text{(i)} \qquad (u * \varphi)\hat{} = \hat{u}\hat{\varphi}.$$

Чтобы доказать это, мы должны показать, что $(u * \varphi)\hat{}\,(\psi) = (\hat{u}\hat{\varphi})(\psi)$ для всех $\psi \in \mathcal{S}$. Из теоремы 1.4 и формулы обращения преобразования Фурье немедленно следует, что $\hat{\varphi}\psi$ равно обратному преобразованию Фурье от $\tilde{\varphi} * \hat{\psi}$. Таким образом, согласно приведенному выше определению преобразования Фурье и свертки,

$$(u * \varphi)\hat{}\,(\psi) = (u * \varphi)(\hat{\psi}) = u(\tilde{\varphi} * \hat{\varphi}) = \hat{u}(\hat{\varphi}\psi) = (\hat{u}\hat{\varphi})(\psi),$$

и равенство (i) установлено.

Пусть $\varphi_0 = e^{-\pi|x|^2}$; тогда $\varphi_0 \in \mathcal{S}$ и $\hat{\varphi}_0 = \varphi_0$ (см. теорему 1.13 и примечание к этой теореме). Если $u \in (L^2, L^2)$, то по теореме Планшереля $\Phi_0 = \hat{u}\hat{\varphi}_0 = (u * \varphi_0)\hat{} \in L^2(E_n)$. Положим $b(x) = e^{\pi|x|^2}\Phi_0(x) = \Phi_0(x)/\hat{\varphi}_0(x)$.

Мы утверждаем, что

$$\text{(ii)} \qquad (u * \varphi)\hat{} = b\hat{\varphi}$$

для всех $\varphi \in \mathscr{S}$. В силу (i), достаточно показать, что $(\hat{u}\hat{\varphi})(\psi) = (b\hat{\varphi})(\psi)$ для всех $\psi \in \mathscr{D}$ (так как $\mathscr{D}$ плотно в $\mathscr{S}$). Но если $\psi \in \mathscr{D}$, то $(\psi/\hat{\varphi}_0)(x) = \psi(x)\, e^{\pi|x|^2} \in \mathscr{D}$, так что

$$(\hat{u}\,\hat{\varphi})(\psi) = \hat{u}\,(\hat{\varphi}\psi) = \hat{u}\,(\hat{\varphi}\hat{\varphi}_0\psi/\hat{\varphi}_0) = (\hat{u}\hat{\varphi}_0)\,(\hat{\varphi}\psi/\hat{\varphi}_0) =$$
$$= \int_{E_n} \Phi_0(x)\,\hat{\varphi}(x)\, e^{\pi|x|^2}\psi(x)\,dx =$$
$$= \int_{E_n} b(x)\,\hat{\varphi}(x)\,\psi(x)\,dx = (b\hat{\varphi})(\psi).$$

Отсюда немедленно следует, что $\hat{u} = b$. Действительно, мы показали, что $\hat{u}\,(\hat{\varphi}\psi) = (b\hat{\varphi})(\psi) = b\,(\hat{\varphi}\psi)$ для всех $\varphi \in \mathscr{S}$ и $\psi \in \mathscr{D}$. Выбирая φ так, чтобы $\hat{\varphi}(x) = 1$ на носителе ψ, получим, что $\hat{u}(\psi) = b(\psi)$ для всех $\psi \in \mathscr{D}$. Таким образом, $\hat{u} = b$.

Так как $u \in (L^2, L^2)$, то существует такое $A > 0$, что $\|b\hat{\varphi}\|_2 = \|(u*\varphi)\hat{}\|_2 = \|u*\varphi\|_2 \leqslant A\|\varphi\|_2$ для всех $\varphi \in \mathscr{S}$. Отсюда, очевидно, следует, что $b \in L^\infty(E_n)$, причем $\|b\|_\infty \leqslant A$ (так как $\mathscr{S}$ плотно в $L^2(E_n)$).

С другой стороны, если $\hat{u} = b \in L^\infty(E_n)$, то из теоремы Планшереля и равенства (i) немедленно следует, что $u \in (L^2, L^2)$ и $\|b\|_\infty$ равна норме оператора B.

Другая простая характеристика класса (L^p, L^q) может быть дана, когда $p = q = 1$.

Теорема 3.19. *Обобщенная функция u принадлежит (L^1, L^1) тогда и только тогда, когда она есть конечная борелевская мера. В этом случае ее полная вариация равна норме оператора B: $L^1 \cap \mathscr{S} \to L^1$, определенного равенством $B\varphi = u * \varphi$ для $\varphi \in \mathscr{S}$.*

Доказательство. Если u — конечная борелевская мера, то, очевидно, она принадлежит (L^1, L^1) (см. замечание после теоремы 1.3).

С другой стороны, пусть $u \in (L^1, L^1)$; рассмотрим семейство L^1-функций $u_\varepsilon = (u * W(\cdot, \varepsilon))$, $\varepsilon > 0$ (ядро Гаусса — Вейерштрасса $W(\cdot, \varepsilon)$ принадлежит $\mathscr{S}$ для всех $\varepsilon > 0$). Тогда, в силу наших предположений об u и леммы 1.17 (a), $\|u_\varepsilon\|_1 \leqslant A\|W(\cdot, \varepsilon)\|_1 = A$. Таким образом, семейство $\{u_\varepsilon\}$ равномерно ограничено по L^1-норме. Будем считать $L^1(E_n)$ вложенным в банахово пространство

$M = M(E_n)$ конечных борелевских мер на E_n [1]. Пространство $M(E_n)$ можно отождествить с пространством, двойственным к $C_0 = C_0(E_n)$, поставив в соответствие каждой мере $\mu \in M$ линейный функционал, принимающий значение $\int_{E_n} \varphi(x)\, d\mu(x)$ на каждой $\varphi \in C_0$. Единичный шар пространства M компактен в слабой * топологии [2]. В частности, мы можем найти меру $\mu \in M$ и сходящуюся к нулю последовательность $\{\varepsilon_k\}$, такие, что $u_{\varepsilon_k} \to \mu$ при $k \to \infty$ в этой топологии, т. е. для каждой $\varphi \in C_0$

$$\text{(i)} \qquad \lim_{k\to\infty} \int_{E_n} \varphi(x)\, u_{\varepsilon_k}(x)\, dx = \int_{E_n} \varphi(x)\, d\mu(x).$$

Мы утверждаем теперь, что μ, рассматриваемая как обобщенная функция, совпадает с u.

Для этого нужно показать, что $u(\psi) = \int_{E_n} \psi(x)\, d\mu(x)$ для всех $\psi \in \mathscr{S}$. Пусть $\psi_\varepsilon(x) = \int_{E_n} \psi(x-t)\, W(t, \varepsilon)\, dt$. Тогда для всех мультииндексов α имеем $(D^\alpha\psi_\varepsilon)(x) = \int_{E_n} (D^\alpha\psi)(x-t)\, W(t, \varepsilon)\, dt$. Из теоремы 1.18 следует, что $(D^\alpha\psi_\varepsilon)(x)$ сходится к $(D^\alpha\psi)(x)$ равномерно по x. Таким образом, $\psi_\varepsilon \to \psi$ в $\mathscr{S}$ при $\varepsilon \to 0$ и, следовательно, $u(\psi_\varepsilon) \to u(\psi)$. Но так как $W(\cdot, \varepsilon) = \tilde{W}(\cdot, \varepsilon)$, то

$$u(\psi_\varepsilon) = u(W(\cdot, \varepsilon) * \psi) = (u * W(\cdot, \varepsilon))(\psi) = \int_{E_n} \psi(x)\, u_\varepsilon(x)\, dx.$$

Полагая $\varepsilon = \varepsilon_k$, устремляя $k \to \infty$ и применяя (i) с $\varphi = \psi$, получаем искомое равенство $u(\psi) = \int_{E_n} \psi(x)\, d\mu(x)$. Остальная часть утверждения теоремы очевидна.

Мы уже отмечали, что простая характеристика пространств (L^p, L^q) в общем случае неизвестна (и, возможно, не существует). Однако имеется следующий общий результат о двойственности.

---

[1] Пусть $f \in L^1(E_n)$; тогда равенство $\mu(F) = \int_F f(x)\, dx$, где F — измеримое подмножество E_n, определяет конечную борелевскую меру на E_n. Полная вариация μ равна $\|f\|_1$.

[2] То есть в слабейшей топологии, в которой элементы φ из C_0 можно рассматривать как непрерывные линейные функционалы на M (если $\mu \in M$ отобразить в $\int_{E_n} \varphi(x)\, d\mu(x)$, то мы получим линейный функционал на M). Дальнейшие детали можно найти в библиографических замечаниях.

Теорема 3.20. *Пусть* $1 \leqslant p,\ q \leqslant \infty,\ 1/p + 1/p' = 1$ *и* $1/q + 1/q' = 1$; *тогда* $(L^p,\ L^q) = (L^{q'},\ L^{p'})$.

Доказательство. Согласно теореме Ф. Рисса, мы можем отождествить пространства $L^{p'}$ и $L^{q'}$ с двойственными к L^p и L^q (это верно при $p,\ q < \infty$; если p или q равно ∞, то, слегка изменяя рассуждения, мы докажем теорему и в этом случае). Пусть $u \in (L^p,\ L^q)$, и пусть $B : L^p \to L^q$ — единственное ограниченное линейное расширение на L^p отображения $\varphi \to u * \varphi,\ \varphi \in \mathcal{S}$. Если $B^* : L^{q'} \to L^{p'}$ обозначает сопряженный к B оператор, то

$$\int_{E_n} (B\varphi)\, \psi dx = \int_{E_n} \varphi\, (B^*\psi)\, dx$$

для всех $\varphi,\ \psi \in \mathcal{S}$. Но в терминах обобщенных функций это эквивалентно равенству $(u * \varphi)(\psi) = (B^*\psi)(\varphi)$, т. е. $(B^*\psi)(\varphi) = u(\tilde{\varphi} * \psi) = u([\tilde{\psi} * \varphi]^{\sim}) = \tilde{u}(\tilde{\tilde{\psi}} * \varphi) = (\tilde{u} * \psi)(\varphi)$ для всех $\varphi,\ \psi \in \mathcal{S}$. Таким образом, $B^*\psi = \tilde{u} * \psi$ для всех $\psi \in \mathcal{S}$. Имеем $\| B^*\psi \|_{p'} \leqslant \| B^* \| \| \psi \|_{q'} = \| B \| \| \psi \|_{q'}$, поэтому $\tilde{u} \in (L^{q'},\ L^{p'})$. Так как $u \in (L^{q'},\ L^{p'})$ тогда и только тогда, когда $\tilde{u} \in (L^{q'},\ L^{p'})$, то отсюда следует, что $(L^p,\ L^q) \subset (L^{q'},\ L^{p'})$. Противоположное включение доказывается заменой $(p,\ q)$ на $(q',\ p')$.

4. Дальнейшие результаты

4.1. Мы отмечали после доказательства теоремы 1.2, что не всякая функция из C_0 является преобразованием Фурье некоторой интегрируемой функции. Предположим для простоты, что $n = 1$; тогда это можно доказать, например, следующим способом. Заметим сначала, что если $\hat{f}$ — преобразование Фурье интегрируемой функции и, кроме того, $\hat{f}$ — нечетная функция, то $\left| \int_1^b [\hat{f}(x)/x]\, dx \right| \leqslant A$ при $1 < b < \infty$, где A не зависит от b. Это есть следствие широко известного соответствующего свойства интегралов функции $\sin x/x$, а именно $\left| \int_\alpha^\beta (\sin x/x)\, dx \right| \leqslant B < \infty$, каковы бы ни были $\alpha,\ \beta\ (0 \leqslant |\alpha| < |\beta| < \infty)$. Действительно, вследствие нечетности $\hat{f}$ мы имеем $\hat{f}(x) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(2\pi x t)\, dt$.

Используя теорему Фубини, легко показать, что $\left|\int\limits_1^b [\hat{f}(x)/x]\,dx\right| \leqslant A$. Следовательно, чтобы построить пример C_0-функции, не являющейся преобразованием Фурье никакой интегрируемой функции, достаточно найти непрерывную функцию, обращающуюся в 0 на бесконечности и такую, что $\int\limits_1^b [g(x)/x]\,dx$ не ограничен при $b \to \infty$. Этими свойствами обладает, например, функция $g(x) = 1/\log x$ при больших x.

4.2. Фиксируем $g \in L^1(E_n)$ и рассмотрим оператор B, переводящий $f \in L^p(E_n)$ в $f * g$. Из теоремы 1.3 следует, что B — ограниченный линейный оператор из $L^p(E_n)$ в $L^p(E_n)$, норма которого $\|B\|^{(p)}$ не превосходит $\|g\|_1$. При $p = 1$ легко показать, что $\|B\|^{(1)} = \|g\|_1$ (в самом деле, из теоремы 1.18 следует, что $f_\varepsilon(t) = P(t, \varepsilon)$ — семейство функций с единичной L^1-нормой, такое, что $f_\varepsilon * g \to g$ по L^1-норме при $\varepsilon \to 0$). Мы видели (теорема 3.18), что $\|B\|^{(2)} = \|\hat{g}\|_\infty$. Естественно, следовательно, спросить: как норма $\|B\|^{(p)}$ может быть выражена в терминах g при $1 \leqslant p \leqslant \infty$? В общем случае удовлетворительный ответ неизвестен. Однако если $g \geqslant 0$, то $\|g\|_1 = |\hat{g}(0)| \leqslant \|\hat{g}\|_\infty \leqslant \|g\|_1$ и, следовательно, $\|B\|^{(2)} = \|g\|_1$. Отсюда, из теоремы 3.20 и одного результата (теоремы М. Рисса о выпуклости) теории интерполяции операторов (которую мы разовьем в гл. V) следует, что $\|B\|^{(p)} = \|g\|_1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, при условии, что $g \geqslant 0$.

4.3. Теорема 1.3 имеет следующее обобщение: *пусть* $f \in L^p(E_n)$ *и* $g \in L^r(E_n)$, $1 \leqslant p$, r *и* $1/p + 1/r \geqslant 1$; *тогда* $h = f * g \in L^q(E_n)$, *где* $1/q = 1/p + 1/r - 1$, *и*

$$\|h\|_q \leqslant \|f\|_p \|g\|_r.$$

Прямое доказательство этого утверждения (часто называемого неравенством Юнга) см. в книге Зигмунда [1], гл. II. В гл. V мы покажем, что это неравенство также непосредственно следует из теоремы М. Рисса о выпуклости.

4.4. Смысл производных по L^p-норме можно лучше понять, заметив, что: (a) если размерность $n = 1$, то $f \in L^p(E_1)$ имеет производную по L^p-норме тогда и только тогда, когда f почти всюду равна локально абсолютно непрерывной функции, производная

которой f' принадлежит $L^p(E_1)$ (см. Бохнер и Чандрасекхаран [1], § 6); (b) в общем случае $f \in L^p(E_n)$ имеет k-ю частную производную по L^p-норме тогда и только тогда, когда f, рассматриваемая как обобщенная функция медленного роста, имеет k-ю частную производную $(\partial/\partial x_k) f$ в смысле обобщенных функций (см. (3.14)), являющуюся L^p-функцией.

4.5. Если $f \in L^p(E_n)$, $1 < p \leqslant \infty$, рассматривается как обобщенная функция медленного роста, то все ее первые частные производные $(\partial/\partial x_k) f$, $k = 1, \ldots, n$, существующие в смысле теории обобщенных функций, будут L^p-функциями тогда и только тогда, когда $\|\tau_h f - f\|_p = \left(\int\limits_{E_n} |f(x-h) - f(x)|^p dx\right)^{1/p} = O(|h|)$.

При $p = 1$ первые частные производные существуют и являются конечными борелевскими мерами тогда и только тогда, когда $\|\tau_h f - f\|_1 = O(|h|)$.

4.6. Операторы сдвига можно определить на пространстве конечных борелевских мер, положив $\tau_h \mu$, где μ — мера из этого пространства, равной мере, значение которой на борелевском множестве F равно $\mu(F - h) = \mu(\{x \in E_n;\ x + h \in F\})$. Мера μ абсолютно непрерывна (по отношению к лебеговой мере) тогда и только тогда, когда полная вариация меры $\tau_h \mu - \mu$ стремится к нулю при $|h| \to 0$ (см. Бохнер [4]).

4.7. Если μ есть дискретная конечная борелевская мера, то $\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{x_k}$, где δ_{x_k} обозначает δ-функцию Дирака, сосредоточенную в точке x_k. Таким образом, в силу определения преобразования Фурье мер (или обобщенных функций), $\hat{\mu}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{-2\pi i t \cdot x_k}$. В этом случае справедливо равенство

$$\text{(i)} \qquad \lim_{R \to \infty} \frac{1}{\Omega_n R^n} \int\limits_{|t| \leqslant R} |\hat{\mu}(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2,$$

где Ω_n обозначает объем единичного шара в E_n. В общем случае можно показать, что если μ — произвольная конечная борелевская мера, а $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ — различные точки в E_n с ненулевыми мерами $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, то равенство (i) все еще остается справедливым (в одномерном случае см. Винер [1]).

4.8. Преобразования Фурье неотрицательных конечных борелевских мер можно описать в терминах *положительно определенных функций,* т. е. непрерывных функций f, определенных на E_n и

обладающих таким свойством: $\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} f(x_i - x_j)\,\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant 0$ для произвольного множества комплексных чисел $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ и точек $\{x_1, \ldots, x_k\}$ из E_n. Бохнер [3] показал, что f есть преобразование Фурье неотрицательной конечной борелевской меры тогда и только тогда, когда f положительно определена (обобщение этого результата на локально компактные абелевы группы см. в работе, Рудина [1]).

4.9. Если существуют постоянные c_n, λ_n, $n = 1, \ldots, m$, такие что $e^{-\delta} = \sum_{n=1}^{m} c_n e^{-(\lambda_n\delta)^2}$, то отсюда, очевидно, будет следовать, что интеграл, суммируемый по Гауссу, суммируем и по Абелю. Равенство (i) в доказательстве теоремы 1.14 почти утверждает это. Поэтому неудивительно, что можно показать, что если для функции f существуют абелево и гауссово средние $A_\varepsilon(f)$ и $G_\varepsilon(f)$ и предел $\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(f) = l$, то существует $\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(f)$, равный l (см. Картрайт [1], Бохнер и Чадрасекхаран [1], гл. I, § 14).

4.10. Интеграл Пуассона функции $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, сходится к $f(x)$ для всех x, удовлетворяющих (1.23) (доказательство см. в работе Вейса [2]). Позднее нам понадобится следующее более общее утверждение. Пусть $\varphi(x)$ — радиальная функция (т. е. $\varphi(x) = \varphi_0(|x|)$). Предположим, что $\varphi_0(r)$ неотрицательна, убывает по r и $\int_{E_n} \varphi(x)\,dx = 1$. Тогда $(f * \varphi_\varepsilon)(x) \to f(x)$ при $\varepsilon \to 0$ для всех x, удовлетворяющих (1.23). Это применимо, в частности, к ядрам Гаусса — Вейерштрасса. Аналогичные рассуждения позволяют показать, что если ν — сингулярная конечная борелевская мера, то интеграл Пуассона — Стилтьеса $v(x, \varepsilon) = \int_{E_n} \varphi_\varepsilon(x - t)\,d\nu(t) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для почти всех x. (Эти рассуждения опираются на тот факт, что $|S_x|^{-1} \int_{S_x} d\nu \to 0$ для почти всех $x \in E_n$, когда объем $|S_x|$ шара S_x с центром в точке x стремится к 0; см. п. 5.6 гл. II или Сакс [1], гл. IV.) Если μ — произвольная конечная борелевская мера, то ее можно разложить на сингулярную часть μ_1 и абсолютно непрерывную часть μ_2. Пусть f — производная (Радона — Никодима) меры μ_2; тогда $u(x, \varepsilon) = \int_{E_n} P(x - t, \varepsilon)\,d\mu(t) = \int_{E_n} P(x - t, \varepsilon)\,d\mu_1 + \int_{E_n} P(x - t, \varepsilon)\,f(t)\,dt = u_1(x, \varepsilon) + u_2(x, \varepsilon)$. Таким образом, $\lim_{\varepsilon\to 0} u(x, \varepsilon) = 0 + f(x) = f(x)$ для почти всех $x \in E_n$.

4.11. Отметим следующие дополнительные утверждения, касающиеся операторов B, коммутирующих со сдвигами.

(a) Интересные случаи могут возникнуть только тогда, когда $p \leqslant q$; если $p > q$, то B отображает все элементы пространства $\mathscr{S}$ в нулевой элемент пространства $L^q(E_n)$.

(b) Если $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $\|B(\varphi)\|_p \leqslant M\|\varphi\|_p$ для всех $\varphi \in \mathscr{S}$ (т. е. $B\varphi = u * \varphi$, где $B \in (L^p, L^p)$), то $B \in (L^q, L^q)$, где $\left|\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right| \leqslant \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$, причем $\|B\varphi\|_q \leqslant M\|\varphi\|_q$.

Для доказательства утверждения (a) заметим, что если $\varphi \in \mathscr{D}$ и $f_h(x) = \varphi(x+h) + \varphi(x)$, то $\|f_h\|_p = 2^{1/p}\|\varphi\|_p$ при достаточно больших h. Однако если $F_h = B(f_h)$ и $\Phi = B(\varphi)$, то $\|F_h\|_q \to 2^{1/q}\|\Phi\|_q$ при $|h| \to \infty$.

Для доказательства утверждения (b) следует применить теорему 3.20 и затем интерполяционную теорему Рисса (гл. V, теорема 1.3).

4.12. Теорема 3.16 касается ограниченных линейных операторов, отображающих L^p в L^q и коммутирующих со сдвигами. Существует много линейных операторов, отображающих $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$, которые коммутируют со сдвигами, но не имеют ограниченных линейных расширений, отображающих какое-либо пространство L^p в некоторое пространство L^q. Примером может служить оператор, переводящий функцию $\varphi \in \mathscr{S}$ в ее частную производную $\partial\varphi/\partial x_k$. Из теоремы 1.8 следует, что этот оператор B, примененный к φ, удовлетворяет равенству $(B\varphi)\hat{}\,(x) = 2\pi i x_k \hat{\varphi}(x)$. Учитывая теорему 3.16, естественно спросить: существует ли обобщенная функция медленного роста u, такая, что $B\varphi = u * \varphi$? Легко проверить, что этим свойством обладает обобщенная функция, переводящая φ в $(-\partial\varphi/\partial x_k)(0)$: $(u * \varphi)(x) = u(\tau_x\varphi) = (-\partial\tau_x\varphi/\partial x_k)(0) = \partial\varphi/\partial x_k$. Кроме того, легко проверить, что $\hat{u} = 2\pi i x_k$. Повторяя эти рассуждения, получим следующий результат:

Пусть $P(D)$—дифференциальный полином и $B\varphi = P(D)\varphi$ для $\varphi \in \mathscr{S}$; тогда существует $u \in \mathscr{S}'$, такая, что $B\varphi = u * \varphi$, $\hat{u}(x) = P(2\pi i x)$ и $(B\varphi)\hat{}\,(x) = P(2\pi i x)\hat{\varphi}(x) = \hat{u}(x)\hat{\varphi}(x)$.

4.13. Для любого $p > 2$ существует $f \in L^p$, такая, что ее преобразование Фурье как обобщенная функция медленного роста не является регулярной. Если бы было верно противное, то из теоремы о замкнутом графике для всех $f \in L^p$, $p > 2$, следовало

бы неравенство $\int\limits_{|x|\leqslant 1} |\hat{f}(x)|\,dx \leqslant A\|f\|_p$. Для получения противоречия возьмем $n=1$, $\hat{f}(x) = e^{-\pi(1+i\delta)x^2}$. Используя теорему 1.13 и аналитическое продолжение, легко показать, что $f(x) = e^{-\pi x^2/(1+i\delta)}/(1+i\delta)^{1/2}$. Но $\int\limits_{|x|\leqslant 1} |\hat{f}(x)|\,dx = A_1$, а $\|f\|_p \leqslant A_2\delta^{1/p-1/2}$ при $\delta \to \infty$, что невозможно, если $p > 2$. Ясно, что подобное доказательство можно провести для любого n.

4.14. Для дальнейших ссылок мы приведем интегральные тождества, использующие полярные координаты, и выявим их связь с интегрированием на группе вращений $SO(n)$.

(a) Пусть f—интегрируемая на E_n функция; тогда $\int\limits_{E_n} f(x)\,dx = \int\limits_{\Sigma_{n-1}} dx' \left(\int\limits_0^\infty f(rx')\,r^{n-1}dr\right)$, где x' пробегает Σ_{n-1} и dx' есть индуцированная лебегова мера на Σ_{n-1}.

(b) Пусть φ интегрируема на Σ_{n-1}. Тогда $\frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} \varphi(x')dx' = \int\limits_{SO(n)} \varphi(\sigma \mathbf{1})\,d\sigma$, где $d\sigma$ — мера Хаара на $SO(n)$, нормированная условием $\int\limits_{SO(n)} d\sigma = 1$, и $\mathbf{1} = (1, 0, \ldots, 0)$. Для доказательства (b) заметим, что так как dx' инвариантна при вращениях $\sigma \in SO(n)$, то

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} \varphi(x')\,dx' = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{SO(n)} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} \varphi(\sigma x')\,dx'd\sigma =$$
$$= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} \int\limits_{SO(n)} \varphi(\sigma\sigma_0 \mathbf{1})\,d\sigma dx' =$$
$$= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} \int\limits_{SO(n)} \varphi(\sigma \mathbf{1})\,d\sigma dx' = \int\limits_{SO(n)} \varphi(\sigma \mathbf{1})\,d\sigma.$$

Здесь σ_0 — любое вращение, переводящее $\mathbf{1}$ в x'. Предпоследнее равенство следует из правой инвариантности меры Хаара $d\sigma$. Основные свойства меры Хаара см., например, в книге Вейля А. [1].

4.15. В качестве довольно прямого следствия теоремы 3.11 можно доказать такое утверждение. Пусть $u \in \mathcal{S}'$; тогда существует такое целое число m, что справедливо представление

$$u = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha D^\alpha (L_{f_\alpha})$$

с некоторыми постоянными a_α и медленно растущими непрерывными функциями f_α. Поскольку верно и обратное утверждение (см. § 3), мы видим, что это представление характеризует обобщенные функции медленного роста.

Библиографические замечания

Фундаментальными трактатами по классическому гармоническому анализу являются Бохнер [3], Винер [1], Зигмунд [1], Титчмарш [2], Бохнер и Чандрасекхаран [1], Бари [1]. Для начального знакомства см. Голдберг [1] и Вейс [3]. Большую часть элементарного материала, использованного в первой главе, в частности введение полярных координат, можно найти у Флеминга [1]; см. также Блюменсон [1]. Большая часть материала § 2 и первая часть § 1 в общей постановке содержится в теории локально компактных абелевых групп; см. Вейль А. [1], Рудин [1], Хьюитт и Росс [1]. Мы не пытались обсуждать здесь важные вопросы, возникающие в связи с тауберовой теоремой Винера и приводящие к более глубокому изучению алгебры L^1. Для ознакомления с этими вопросами в рамках произвольных локально компактных абелевых групп см. Наймарк [1] или Рудин [1]. В доказательстве теоремы 1.14 мы следуем Бохнеру и Чандрасекхарану [1]. Техника аппроксимации единицы (в частности, варианты теорем 1.18 и 1.25) имеет длинную историю, которую мы не станем описывать. Предложенная здесь формулировка теоремы 1.25 основана на одном замечании Р. Латцера; аналогичный результат можно найти у Кальдерона и Зигмунда [3], гл. II. По поводу результатов из функционального анализа, использованных в этой главе, в частности слабой* компактности единичного шара, использованной в доказательстве теоремы 3.19, мы отсылаем читателя к книге Ройдена [1].

Общая теория обобщенных функций и их применений изложена в книгах Л. Шварца [1], Гельфанда и Шилова [1] и Эренпрейса [1]. Там читатель найдет также доказательства, которые мы опустили, и ссылки на классические работы по обобщенным функциям. Для краткого ознакомления с этой теорией в связи с преобразованием Фурье см. Хёрмандер [2], гл. I, и Иосида [1], гл. VI. Теоремы 3.16, 3.18, 3.19, 3.20, связанные с операторами типа (L^p, L^q), в различных формах известны уже довольно давно. См., например, Бохнер [9], Хилле и Филлипс [1], Бохнер и Чандрасекхаран [1], Зигмунд [1], гл. IV, Хёрмандер [1], где можно найти еще и другие ссылки.

Глава II

ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Основным средством изучения функции f, определенной на E_n, является переход к определенной на $(n+1)$-мерном верхнем полупространстве гармонической функции, для которой f служит граничным значением. В первом параграфе излагаются основные свойства гармонических функций нескольких переменных. Связь между определенной на E_n функцией f и гармонической функцией $(n+1)$ переменных — ее интегралом Пуассона изучается в § 2. Параграфы 3 и 4 посвящены некасательной сходимости на границе и гармоническому мажорированию. Эти понятия, интересные и сами по себе, доставляют нам важные средства, которые будут использованы в гл. III и VI.

1. Основные свойства гармонических функций

Мы предполагаем, что читатель знаком со свойствами гармонических функций, обычно приводимыми в курсах теории функций комплексного переменного. Многие из этих свойств обобщаются на высшие размерности, однако для установления этих свойств мы не можем больше опираться на теорию аналитических функций (как это часто делается в случае двух переменных). Поэтому в этом параграфе развиваются основы теории гармонических функций n переменных.

Функция u, определенная в некоторой *области* (открытом связном подмножестве пространства E_n), называется *гармонической*, если она дважды дифференцируема (т. е. ее вторые частные производные существуют и непрерывны) и удовлетворяет *уравнению Лапласа*

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0$$

во всех точках этой области. Из первых двух приведенных ниже примеров легко следует, что введенные в § 1 гл. I абелевы средние и интегралы Пуассона являются гармоническими функциями.

(1) Фиксируем $t \in E_n$; тогда $u(x, y) = u(x_1, \ldots, x_n, y) = e^{-2\pi|t|y} e^{2\pi i x \cdot t}$ — гармоническая функция в E_{n+1}.

(2) $P(x, y) = c_n [y/(|x|^2 + y^2)^{(n+1)/2}]$ — гармоническая функция в $E_{n+1}^{+} = \{(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y) \in E_{n+1};\ y > 0\}$ (эту область часто называют *верхним полупространством*)[1].

---

[1] Мы обозначаем точки E_{n+1}^{+} упорядоченными парами (x, y), где $x \in E_n$, а y — положительное число, чтобы подчеркнуть, что эта область есть обобщение верхней полуплоскости (в случае $n = 1$).

(3) При $n \geqslant 3$ функция $u(x) = |x|^{2-n}$ является гармонической в любой области, не содержащей начала координат. Соответствующим примером для $n = 2$ будет функция $u(x) = \log|x|$. В определенном смысле, который станет ясным позднее, эти функции «порождают» все гармонические функции.

(4) Ниже будет показано (теорема 1.7), что гармоническая функция бесконечно дифференцируема и даже вещественно-аналитична (см. п. 5.5 гл. IV). Ясно, что любая частная производная гармонической функции также есть гармоническая функция. В качестве иллюстрации заметим, что $P(x, y)$ есть частная производная по y функции $c_n/[(1-n)(|x|^2+y^2)^{(n-1)/2}]$ при $n>1$ и функции $c_n \log(|x|^2+y^2)^{1/2}$ при $n=1$.

(5) Если u — гармоническая функция в области $\mathcal{D}$, то $\tau_h u$ гармонична в $\mathcal{D}+h=\{x+h;\ x \in \mathcal{D}\}$. Таким образом, гармоничность сохраняется при сдвигах. Гармоничность сохраняется также при вращениях и растяжениях (это свойство можно проверить и прямыми вычислениями, но оно станет очевидным после того, как мы охарактеризуем гармонические функции в терминах среднего значения; см. теорему 1.1 ниже).

(6) Функция $u(x, y) = \sin\sqrt{n}\, y \prod\limits_{k=1}^{n} \operatorname{ch} x_k$ гармонична в $E_{n+1} = \{(x, y);\ x \in E_n,\ y \in E_1\}$.

Среднее значение функции u по площади сферы радиуса $r>0$ *с центром в точке x* будем обозначать $\mathcal{M}(r) = \mathcal{M}_{x,u}(r)$ (чтобы подчеркнуть зависимость от u, x и r). Таким образом, обозначая через Σ единичную сферу в E_n, а через dt' элемент площади Σ (такие обозначения использовались при доказательстве леммы 1.17 гл. I), получим

$$\mathcal{M}_{x,u}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Sigma} u(x+rt')\,dt'.$$

Теорема 1.1 (теорема о среднем для гармонической функции). *Пусть функция u гармонична в некоторой области* $\mathcal{D}$, *и пусть шар радиуса* r_0 *с центром в точке* $x \in \mathcal{D}$ *содержится в* $\mathcal{D}$; *тогда*

$$u(x) = \mathcal{M}_{x,u}(r)$$

при всех $0 < r \leqslant r_0$.

Доказательство. В силу сохранения гармоничности при сдвигах (см. (5)), можно положить $x = 0$. Обозначим через $\mathcal{E}$ подобласть с достаточно гладкой границей $\partial\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$. Применяя формулу Грина к функциям u и 1 в $\mathcal{E}$, получим

$$\int\limits_{\partial\mathcal{E}} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0, \tag{1.2}$$

где $\partial/\partial n$ — дифференцирование в направлении внешней нормали к $\partial\mathscr{E}$, а ds — элемент площади поверхности $\partial\mathscr{E}$.

Обозначим через Σ_ε и Σ_r, $0 < \varepsilon < r \leqslant r_0$, сферы радиусов соответственно ε и r с центром в 0. Применяя формулу Грина к функциям u и

$$v(x) = \begin{cases} |x|^{-(n-2)} & \text{при } n > 2, \\ \log|x| & \text{при } n = 2 \end{cases}$$

в области, расположенной между двумя сферами, получим [1]

$$0 = \left(\int\limits_{\Sigma_r} - \int\limits_{\Sigma_\varepsilon}\right)(-(n-2)|x|^{-(n-1)}u)\,ds - \\ - \left\{\int\limits_{\Sigma_r} v\frac{\partial u}{\partial n}\,ds + \int\limits_{\Sigma_\varepsilon} v\frac{\partial u}{\partial n}\,ds\right\}.$$

Но v постоянна на Σ_r (она равна там $r^{-(n-2)}$) и на Σ_ε (она равна там $\varepsilon^{-(n-2)}$). Так как u гармонична в $\mathscr{D} \supset \{x \in E_n;\ |x| \leqslant \leqslant r_0\}$, то, применяя (1.2) к $\partial\mathscr{E} = \Sigma_r$ и $\partial\mathscr{E} = \Sigma_\varepsilon$, видим, что член в фигурных скобках равен 0. Следовательно,

$$\varepsilon^{1-n}\int\limits_{\Sigma_\varepsilon} u\,ds = r^{1-n}\int\limits_{\Sigma_r} u\,ds.$$

Отсюда

$$\mathscr{M}_{0,u}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}}\int\limits_{\Sigma} u(rt')\,dt' = \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{\Sigma_r} u\,ds = \\ = \frac{1}{\omega_{n-1}\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{\Sigma_\varepsilon} u\,ds.$$

Очевидно, что последнее выражение стремится к $u(0)$ при $\varepsilon \to 0$, и теорема доказана.

Следствие 1.3 (принцип максимума для гармонических функций). *Пусть u — вещественная гармоническая функция, определенная в области $\mathscr{D}$, причем $A = \sup\limits_{x \in \mathscr{D}} u(x) < \infty$; тогда либо $u(x) < A$ для всех $x \in \mathscr{D}$, либо $u(x) \equiv A$ в $\mathscr{D}$.*

Доказательство. Пусть $u(x) = A$ для некоторого $x \in \in \mathscr{D}$. В силу теоремы 1.1, существует такое $r_0 > 0$, что $A = u(x) = = \mathscr{M}_{x,u}(r)$ при $0 < r \leqslant r_0$. Так как u непрерывна и удовлетворяет неравенству $u \leqslant A$, то отсюда следует, что $u \equiv A$ на $\Sigma_r(x) = = \{y \in E_n;\ |y - x| = r\}$. Таким образом, $u(t) = A$ для всех

[1] Доказательство проводится для случая $n > 2$. В случае $n = 2$ оно требует очевидных изменений. При $n = 1$ теорема очевидна, так как в этом случае все гармонические функции линейны.

$t = x + h$, $|h| < r_0$. Следовательно, множество $\{t \in E_n;\ u(t) = A\}$ открыто. С другой стороны, из непрерывности u вытекает, что это множество также и замкнуто (относительно $\mathcal{D}$). Так как $\mathcal{D}$ связно, то отсюда следует, что это множество совпадает с $\mathcal{D}$, т. е. $u(x) \equiv A$ в $\mathcal{D}$.

Применяя доказанное утверждение к функции $-u$, получим *принцип минимума для гармонических функций:* пусть u удовлетворяет предположениям следствия 1.3 и $B = \inf\limits_{x \in \mathcal{D}} u(x) > -\infty$; тогда либо $u(x) > B$ для всех $x \in \mathcal{D}$, либо $u(x) \equiv B$.

Принцип максимума (минимума) можно сформулировать в следующем эквивалентном виде:

Следствие 1.3′. *Пусть u непрерывна в замыкании $\bar{\mathcal{D}}$ ограниченной области $\mathcal{D}$ и гармонична в $\mathcal{D}$; тогда либо максимум (минимум) u достигается только на границе $\partial\mathcal{D} = \bar{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$ области $\mathcal{D}$, либо u — постоянная функция.*

Применяя это утверждение к разности $u_1 - u_2$, получим

Следствие 1.4. *Пусть u_1 и u_2 непрерывны в замыкании $\bar{\mathcal{D}}$ ограниченной области $\mathcal{D}$, гармоничны в $\mathcal{D}$ и совпадают на границе $\partial\mathcal{D} = \bar{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$; тогда $u_1(x) = u_2(x)$ для всех $x \in \bar{\mathcal{D}}$.*

Другим следствием теоремы о среднем является следующее утверждение, известное как *теорема Лиувилля:*

Теорема 1.5. *Пусть v гармонична в E_n и ограничена; тогда v — постоянная функция.*

Доказательство. Обозначим через $\Omega_n = \omega_{n-1}/n$ объем единичного шара в E_n; тогда из теоремы о среднем получим

$$v(x) = v(x)\frac{n}{t^n}\int\limits_0^t \rho^{n-1}d\rho = \frac{n}{t^n}\int\limits_0^t \mathcal{M}_{x,v}(\rho)\,\rho^{n-1}d\rho =$$

$$= \frac{n}{\omega_{n-1}}\,\frac{1}{t^n}\int\limits_0^t \left\{\int\limits_\Sigma v(x+\rho y')\,dy'\right\}\rho^{n-1}d\rho =$$

$$= \frac{1}{t^n\Omega_n}\int\limits_{|y|\leqslant t} v(x+y)\,dy$$

для всех $x \in E_n$ и $t > 0$. Таким образом,

$$|v(x_1) - v(x_2)| = \frac{1}{t^n\Omega_n}\left|\int\limits_{S_t(x_1)} v(x)\,dx - \int\limits_{S_t(x_2)} v(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|v\|_\infty}{t^n\Omega_n}\left|\left(\int\limits_{S_t(x_1)\setminus S_t(x_2)} dx + \int\limits_{S_t(x_2)\setminus S_t(x_1)} dx\right)\right|,$$

где $S_t(x)$ — шар радиуса t с центром в точке x. Но объем симметричной разности $(S_t(x_1) \setminus S_t(x_2)) \cup (S_t(x_2) \setminus S_t(x_1))$, деленный на t^n, очевидно, стремится к 0 при $t \to \infty$, так что $v(x_1) - v(x_2) = 0$, т. е. $v(x)$ — постоянная функция.

Теорема о среднем полностью характеризует гармонические функции. Для доказательства сначала установим одну лемму.

Лемма 1.6. *Пусть u дважды дифференцируема в области $\mathcal{D}$ и $\mathcal{M}_{x,u}(r) = u(x)$ всякий раз, когда шар $\{t \in E_n;\ |t-x| \leqslant r\}$ лежит в $\mathcal{D}$; тогда u гармонична в $\mathcal{D}$.*

Доказательство. Фиксируем $x \in \mathcal{D}$ и положим $\mathcal{M}''(0)$ $(= \mathcal{M}''_{x,u}(0))$ равным пределу второй производной $(d^2/dr^2)\,\mathcal{M}(r)$ при $r \to 0$ (существование этого предела следует из непрерывности вторых частных производных функции u). Утверждение леммы немедленно следует из тождества

$$\mathcal{M}''(0) = \frac{1}{n}(\Delta u)(x).$$

Полагая $t' = (t'_1, \ldots, t'_n) \in \Sigma$, получим

$$\frac{d^2}{dr^2}\mathcal{M}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Sigma} \left(\sum_{j,k=1}^{n} u_{jk}(x + rt')\, t'_j t'_k \right) dt'.$$

Таким образом,

$$\mathcal{M}''(0) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \sum_{j,k=1}^{n} \int\limits_{\Sigma} u_{jk}(x)\, t'_j t'_k dt' =$$

$$= \frac{1}{\omega_{n-1}} \sum_{j,k=1}^{n} \left(\int\limits_{\Sigma} t'_j t'_k dt' \right) u_{jk}(x).$$

Но в силу симметрии $\int\limits_{\Sigma} t'_j t'_k dt' = 0$ при $j \neq k$ и $\int\limits_{\Sigma} (t'_j)^2\, dt' = \omega_{n-1}/n$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Таким образом, $\mathcal{M}''(0) = (1/n) \sum\limits_{j=1}^{n} u_{jj}(x)$, и лемма доказана.

Следующий результат показывает, в частности, что лемма 1.6 остается справедливой, даже если условие существования непрерывных вторых частных производных заменить более слабым условием локальной интегрируемости функции u. Более того, из этого результата и теоремы 1.1 следует, что каждая гармоническая в области $\mathcal{D}$ функция принадлежит классу[1] $C^\infty(\mathcal{D})$. Рассмотрим сначала случай, когда u непрерывна.

---

[1] Подробное рассмотрение этих вопросов см. в книге Привалова [1]. — *Прим. ред*

Теорема 1.7. *Пусть непрерывная в области $\mathcal{D}$ функция u обладает свойством среднего значения (как в лемме 1.6); тогда u гармонична в $\mathcal{D}$ и имеет в этой области непрерывные частные производные всех порядков.*

Доказательство. Так как задача локальная, то, сужая функцию u на шар, лежащий в $\mathcal{D}$ вместе со своим замыканием, мы можем считать область $\mathcal{D}$ шаром, а функцию u интегрируемой на $\bar{\mathcal{D}}$. Продолжим теперь u на все пространство E_n, считая ее равной 0 вне $\bar{\mathcal{D}}$. Выберем радиальную функцию $\varphi \in C^\infty(E_n)$ так, чтобы $\int\limits_{E_n} \varphi(x)\,dx = 1$ и носитель φ содержался в шаре единичного радиуса. Положим затем $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$, где $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Ясно, что $u_\varepsilon \in C^\infty(E_n)$. Используя полярные координаты, получаем

$$u_\varepsilon(x) = \int\limits_{E_n} \varphi_\varepsilon(t)\,u(x-t)\,dt = \int\limits_0^\varepsilon \varphi_\varepsilon(r)\left\{\int\limits_\Sigma u(x-rt')\,dt'\right\} r^{n-1}\,dr =$$

$$= \int\limits_0^\varepsilon \varphi_\varepsilon(r)\,\omega_{n-1}\mathcal{M}_{x,u}(r)\,r^{n-1}dr.$$

Если ε меньше расстояния от x до границы $\mathcal{D}$, то $\mathcal{M}_{x,u}(r) = u(x)$ при $0 < r \leqslant \varepsilon$. Таким образом, $u_\varepsilon(x) = u(x)\,\omega_{n-1}\int\limits_0^\varepsilon \varphi_\varepsilon(r)\,r^{n-1}dr = u(x)$ [1]. В частности, если $2d$ — радиус шара $\mathcal{D}$, а x_0 — его центр, то $u(x) = u_d(x)$ для всех точек x, расстояние которых от x_0 меньше чем d. Отсюда следует, что в окрестности каждой точки $x_0 \in \mathcal{D}$ функция u совпадает с бесконечно дифференцируемой функцией, и теорема доказана, так как гармоничность u теперь вытекает из леммы 1.6.

Если функция u всего лишь локально интегрируема, то пусть свойство среднего значения выполняется в виде

$$u(x) = \frac{1}{t^n\Omega_n}\int\limits_{|y|<t} u(x+y)\,dy$$

для достаточно малых t, так чтобы шар радиуса t с центром в точке x целиком лежал в $\mathcal{D}$. Используя рассуждения, аналогичные при-

---

[1] Мы уже видели в первой главе (см. теоремы 1.18 и 1.25), как такие свертки $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$ аппроксимируют u. Добавив предположение, что u обладает свойством среднего значения, мы получили, что $u_\varepsilon(x) = u(x)$ при достаточно малых ε. В общем случае, когда φ — гладкая функция, $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$ также гладкая; в этом случае такое семейство $\{u_\varepsilon\}$ часто называют *регуляризацией* функции u

веденным выше, можно показать, что $u(x) = u_d(x)$ и, следовательно, утверждения теоремы 1.7 все еще будут справедливы.

Следствие 1.8. *Пусть $\{u_n\}$ — последовательность гармонических в области $\mathcal{D}$ функций. Если эта последовательность сходится к некоторой функции и равномерно на каждом компактном подмножестве $\mathcal{D}$, то и также гармонична в области $\mathcal{D}$.*

Доказательство. Так как в этом случае функция u непрерывна, то, в силу теоремы 1.7, достаточно показать, что u обладает свойством среднего значения. Из теоремы 1.1 следует, что $\mathcal{M}_{x,u_n}(r) = u_n(x)$ для всех $x \in \mathcal{D}$ и таких r, что $\{t;\ |x - t| \leqslant r\} \subset \mathcal{D}$. Так как u_n равномерно сходится к u на сфере $\{t;\ |x - t| = r\}$, интегралы, определяющие величины $\mathcal{M}_{x,u_n}(r)$, сходятся к интегралу, определяющему $\mathcal{M}_{x,u}(r)$. Отсюда следует, что $\mathcal{M}_{x,u}(r) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{M}_{x,u_n}(r) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$, а это и есть искомый результат.

Классической задачей, связанной с гармоническими функциями, является широко известная задача Дирихле. Чаще всего она формулируется так:

Пусть $\mathcal{D}$ — область с компактным замыканием $\bar{\mathcal{D}}$ и f — непрерывная функция, определенная на границе $\partial\mathcal{D} = \bar{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$. Существует ли непрерывная на $\bar{\mathcal{D}}$ функция u, такая, что

(i) *u гармонична в $\mathcal{D}$,*

(ii) *$u(x) = f(x)$ при $x \in \partial\mathcal{D}$?*

Следствие 1.4 утверждает, что если такая функция u существует, то она единственна.

Задача Дирихле интересует нас главным образом в случае, когда $\mathcal{D}$ есть верхнее полупространство E_{n+1}^{+} (см. § 2). Тем не менее основополагающее значение и многочисленные применения имеет решение поставленной здесь задачи в случае, когда $\mathcal{D}$ есть внутренность шара. В этом частном случае решение получается при помощи *ядра Пуассона для единичного шара*:

$$p(s, x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{1 - |x|^2}{|x - s|^n} = \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{1 - r^2}{(1 - 2r\cos\gamma + r^2)^{n/2}},$$

где $r = |x| < 1 = |s|$ и γ — угол между векторами x и s, так что $r\cos\gamma = x \cdot s$.

Это ядро обладает следующими тремя основными свойствами:

Теорема 1.9. *Пусть $\Sigma = \Sigma_{n-1} = \{s \in E_n;\ |s| = 1\}$ обозначает единичную сферу в E_n и ds — элемент площади поверхности; тогда:*

(a) *$p(s, x) \geqslant 0$ для всех $s \in \Sigma$ и $|x| < 1$;*

(b) $\int\limits_{\Sigma} p(s, x)\,ds = 1$ *при* $|x| < 1$;

(c) *пусть* $x' \in \Sigma$; *положим* $x = rx'$ $(0 \leqslant r < 1)$; *тогда для всех* $\delta > 0$

$$\int\limits_{s\in\Sigma, |s-x'|>\delta} p(s, rx')\,ds \to 0$$

при $r \to 1$ *равномерно по* x'.

Доказательство. Свойство (a) очевидно, как и свойство (c), если заметить, что $|s - x| = |s - rx'|$ отграничено от нуля (равномерно по x') при таких $s \in \Sigma$, что $|s - x'| > \delta$.

Для того чтобы доказать свойство (b), заметим сначала, что $p(x, s)$ — гармоническая функция переменной x, $|x| < 1$, при каждом $s \in \Sigma$. Тогда, в силу теоремы 1.1, имеем

$$1 = \omega_{n-1} p(s, 0) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Sigma} \omega_{n-1} p(s, rx')\,dx' = \int\limits_{\Sigma} p(s, rx')\,dx'$$

при $0 \leqslant r < 1$ и $s, x' \in \Sigma$. Но $|rx' - s| = |rs - x'|$ и, следовательно, $p(s, rx') = p(x', rs)$. Отсюда свойство (b) получается заменой $s \leftrightarrow x'$.

Используя эти свойства, можно решить задачу Дирихле для единичного шара.

Теорема 1.10. *Пусть функция f непрерывна на Σ; тогда функция u, определенная равенством*

$$u(x) = \int\limits_{\Sigma} f(s)\, p(s, x)\,ds$$

при $|x| < 1$ и $u(x) = f(x)$ при $|x| = 1$, гармонична при $|x| < 1$ и непрерывна при $|x| \leqslant 1$.

Доказательство. Гармоничность u при $|x| < 1$ следует из того, что лапласиан u равен интегралу от произведения f на лапласиан (по x) $p(s, x)$. Это утверждение требует обоснования перемены порядка дифференцирования и интегрирования. Более простое доказательство получается, если заметить, что, как непосредственно следует из теоремы Фубини, среднее значение u по сфере радиуса $r < 1 - |x|$ с центром в точке x равно интегралу от произведения $f(s)$ на среднее значение $p(s, \cdot)$ по той же сфере. Так как $p(s, \cdot)$ гармонична, то последнее равно $p(s, x)$. Таким образом, u удовлетворяет теореме 1.7 и, следовательно, гармонична внутри единичного шара.

Чтобы показать, что u непрерывна на замкнутом единичном шаре, достаточно доказать это на его границе Σ. Пусть $x' \in \Sigma$, $0 \leqslant r < 1$, $x = rx'$ и $A_\delta = \{s \in \Sigma;\ |s - x'| > \delta\}$. Тогда в силу

утверждений (b) и (a) теоремы 1.9 имеем

$$|u(x)-u(x')| = \left|\int_{\Sigma}[f(s)-f(x')]\,p(s, rx')\,ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{A_\delta}|f(s)-f(x')|\,p(s, rx')\,ds + $$
$$+\int_{\Sigma\setminus A_\delta}|f(s)-f(x')|\,p(s, rx')\,ds.$$

Еще раз используя утверждение (b) теоремы 1.9, получим, что второе слагаемое мажорируется величиной

$$\{\sup_{|s-x'|\leqslant\delta}|f(s)-f(x')|\}\int_{\Sigma\setminus A_\delta}p(s, x)\,ds \leqslant \{\sup_{|s-x'|\leqslant\delta}|f(s)-f(x')|\}\cdot 1,$$

которую можно сделать меньше любого $\varepsilon > 0$, выбрав δ достаточно близким к 0. С другой стороны, при фиксированном δ первое слагаемое мажорируется величиной

$$2\{\sup_{t\in\Sigma}|f(t)|\}\int_{A_\delta}p(s, x)\,ds.$$

Но по теореме 1.9 (c) эта величина стремится к 0 при $r \to 1$ равномерно по x'. Таким образом, $|u(x)-u(x')| < \varepsilon$ равномерно по x', если r достаточно близко к 1.

Следовательно, если $x_0 \in \Sigma$ и $x = rx'$, то $|u(x_0)-u(x)| \leqslant \leqslant |u(x_0)-u(x')| + |u(x')-u(x)| = |f(x_0)-f(x')| + |u(x')-u(x)| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$ при x, достаточно близких к x_0 (в этом случае обе величины $1-r$ и $|x'-x|$ малы). Это доказывает теорему.

Применяя подходящие сдвиги и растяжения, с помощью этого результата можно получить решение задачи Дирихле для произвольного шара в E_n.

Следствие 1.11. *Пусть $\mathcal{D}$ — внутренность шара радиуса a с центром в точке x_0 и f — функция, непрерывная на границе $\partial\mathcal{D}$ шара $\mathcal{D}$; тогда функция u, определенная равенством*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}a^{2-n}}\int_{\Sigma}f(x_0+as)\frac{a^2-|x-x_0|^2}{|(x-x_0)-as|^n}\,ds$$

при $|x-x_0| < a$ и равенством $u(x) = f(x)$ при $|x-x_0| = a$, гармонична в $\mathcal{D}$ и непрерывна на $\overline{\mathcal{D}}$.

Дадим два приложения этого результата. Первое из них есть следующая основная теорема о равномерно ограниченных последовательностях гармонических функций:

Теорема 1.12. *Пусть $\{u_m\}$ — последовательность функций, гармонических в области $\mathcal{D} \subset E_n$, равномерно ограниченная в замыкании ограниченной подобласти $\mathcal{S}$, такой, что $\overline{\mathcal{S}} \subset \mathcal{D}$. Тогда существует подпоследовательность $\{u_{m_k}\}$, равномерно сходящаяся к гармонической в $\mathcal{S}$ функции.*

Доказательство. Если мы покажем, что функции u_m равностепенно непрерывны на $\overline{\mathcal{S}}$, то утверждение данной теоремы будет следовать из теоремы Асколи и следствия 1.8. Для того чтобы доказать эту равностепенную непрерывность, достаточно показать, что первые частные производные функций u_m равномерно ограничены на каждом замкнутом подмножестве из $\mathcal{S}$. Но если $x_0 \in \mathcal{S}$, то $u_m(x)$ имеет интегральное представление из следствия 1.11 при $|x - x_0| < a$ для достаточно малых a, таких, что шар радиуса a с центром в точке x_0 лежит в $\mathcal{S}$. Дифференцируя по x_i ($i = 1, \ldots, n$) и вычисляя эту частную производную в точке x_0, получим

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i}(x_0) = \frac{n}{\omega_{n-1} a} \int_{\Sigma} u_m(x_0 + as)\, s_i ds.$$

Таким образом, $|(\partial u_m/\partial x_i)(x_0)| \leqslant (n/a) \sup\limits_{y \in \mathcal{S}} |u_m(y)|$, откуда и следует равномерная ограниченность первых частных производных функций u_m в каждом замкнутом подмножестве из $\mathcal{S}$.

Второе приложение следствия 1.11 — *принцип симметрии* для гармонических функций:

Теорема 1.13. *Пусть $\mathcal{D} \subset E_{n+1}$ — область, симметричная относительно E_n (т. е. если $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathcal{D}$, то $(x, -y) \in \mathcal{D}$). Если непрерывная на $\mathcal{D}$ функция u удовлетворяет равенству $u(x, y) = -u(x, -y)$ и гармонична в «верхней половине» $\mathcal{D}^+ = \{(x, y) \in \mathcal{D};\ y > 0\}$ области $\mathcal{D}$, то она гармонична во всей области $\mathcal{D}$.*

Доказательство. По предположению, функция u гармонична в $\mathcal{D}^+$. Так как $-(\Delta u)(x, -y) = (\Delta u)(x, y)$, то u гармонична также и в $\mathcal{D}^- = \{(x, y) \in \mathcal{D};\ y < 0\}$. Следовательно, достаточно показать, что u гармонична в окрестности каждой точки множества $\mathcal{D} \cap E_n = \{(x, y) \in \mathcal{D};\ y = 0\}$. Пусть $x_0 = (x_0, 0)$ — такая точка; тогда существует замкнутый шар $S_a(x_0)$ радиуса $a > 0$ с центром в этой точке, содержащийся в $\mathcal{D}$. Для (x, y) из этого шара положим

$$w(x, y) = \frac{a^{n-1}}{\omega_n} \int_{\Sigma_n} u(x_0 + as, at) \frac{a^2 - |(x - x_0, y)|^2}{|(x - x_0 - as, y - at)|^{n+1}} d\sigma, \tag{1.14}$$

где $\sigma = (s, t) = (s_1, \ldots, s_n, t)$ — точка на единичной сфере Σ_n в E_{n+1}. В силу следствия 1.11, w — гармоническая функция, совпа-

дающая с u на границе шара $S_a(x_0)$. С другой стороны, интеграл (1.14) обращается в 0 при $y=0$, так как $u(x_0+as, at) = -u(x_0+as, -at)$,

$$\frac{a^2-|(x-x_0, 0)|^2}{|(x-x_0-as, -at)|^{n+1}} = \frac{a^2-|(x-x_0, 0)|^2}{|(x-x_0-as, at)|^{n+1}},$$

в то время как по непрерывности $u(x_0, 0)=0$ при всех $(x_0, 0)\in\mathcal{D}$. Таким образом, w совпадает с непрерывной функцией на верхней полусфере $\{(x, y)\in\overline{E^+_{n+1}};\ |x-x_0|^2+y^2=a^2\}$, т. е. на верхней половине границы шара $S_a(x_0)$, и на $S_a(x_0)\cap E_n$. Поскольку обе функции w и u гармоничны внутри этой полусферы, то, в силу следствия 1.4, они там совпадают. Используя те же самые рассуждения для нижней полусферы, можно показать, что $u\equiv w$ в $S_a(x_0)$. Так как функция w гармонична в шаре $S_a(x_0)$, то это же справедливо и для u. Теорема доказана.

Приведем одно непосредственное следствие принципа симметрии и теоремы Лиувилля (см. теорему 1.5), которое будет полезно в следующем параграфе.

Следствие 1.15. *Пусть непрерывная на* $\overline{E^+_{n+1}}=E^+_{n+1}\cup E_n=\{(x, y)\in E_{n+1};\ y\geqslant 0\}$ *функция* u *гармонична в* E^+_{n+1} *и равна* 0 *на* E_n. *Тогда если* u *ограничена в* E^+_{n+1}, *то она равна* 0 *тождественно.*

Отметим, что если на u не наложить какого-то условия, подобного ограниченности, то это утверждение не будет справедливым. Например, функция $u(x, y)=y$ удовлетворяет всем условиям следствия 1.15, за исключением ограниченности. Этот пример также показывает, что задача Дирихле для неограниченной области $\mathcal{D}=E^+_{n+1}$ не имеет единственного решения (так как функции $u(x, y)=y$ и $v(x, y)=0$ гармоничны в $\mathcal{D}$ и обе имеют граничное значение $f\equiv 0$ на E_n). С другой стороны, следствие 1.15 показывает, что решение будет единственным, если наложить дополнительное условие ограниченности. В следующем параграфе мы подробно изучим несколько вариантов задачи Дирихле, связанной с областью E^+_{n+1}.

2. Характеризация интегралов Пуассона

Покончив с необходимыми приготовлениями, перейдем теперь к той части теории гармонических функций, которая связана с гармоническим анализом на E_n.

Поставим следующую задачу: дана функция $f\in L^p(E_n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$; существует ли определенная в верхнем полупростран-

стве E_{n+1}^{+} гармоническая функция u, такая, что

$$\|u(\cdot, y)-f\|_p=\Big(\int_{E_n}|u(x, y)-f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}\to 0$$

при $y\to 0$? Если f непрерывна и $p=\infty$, то это прямое обобщение задачи Дирихле, поставленной для неограниченной области $\mathcal{D}=E_{n+1}^{+}$. Мы только что видели, что в этом случае решение не обязано быть единственным. Ясно также, что если f не является непрерывной, то не может существовать гармонической (и, в частности, непрерывной) функции u, такой, что $\|u(\cdot, y)-f\|_\infty\to 0$ при $y\to 0$. Тем не менее решение этой задачи существует при $p<\infty$; если же задачу поставить соответствующим образом, то решение будет существовать и при $p=\infty$.

Следующее утверждение, состоящее в основном из уже установленных результатов, показывает, что интеграл Пуассона функции f и есть искомая гармоническая функция.

Теорема 2.1. (a) *Пусть* $f\in L^p(E_n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, *и*

$$u(x, y)=\int_{E_n}f(t)\,P(x-t, y)\,dt$$

— интеграл Пуассона функции f; тогда u гармонична в E_{n+1}^{+}, $\lim\limits_{y\to 0}u(x, y)=f(x)$ для почти всех $x\in E_n$ и

$$\|u(\cdot, y)\|_p=\Big(\int_{E_n}|u(x, y)|^p\,dx\Big)^{1/p}\leqslant\|f\|_p \tag{2.2}$$

для всех $y>0$. Если $1\leqslant p<\infty$, то $u(\cdot, y)$ сходится к f по L^p-норме при $y\to 0$, т. е.

$$\|u(\cdot, y)-f\|_p=\Big(\int_{E_n}|u(x, y)-f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}\to 0$$

при $y\to 0$.

(b) *Если $f\in C_0\subset L^\infty(E_n)$, то функция $u(x, y)$, равная интегралу Пуассона функции f, равномерно сходится к f: $\|u(\cdot, y)-f\|_\infty=\sup\limits_{x\in E_n}|u(x, y)-f(x)|\to 0$ при $y\to 0$. Если предположить только, что f непрерывна и ограничена, то сходимость будет равномерной на компактных подмножествах из E_n. В обоих случаях можно продолжить $u(x, y)$ до непрерывной на $\overline{E_{n+1}^{+}}=E_{n+1}^{+}\cup E_n$ функции, положив $u(x, 0)=f(x)$.*

Доказательство. Сходимость почти всюду и сходимость по норме в части (a) доказаны в теоремах 1.25 и 1.18 гл. I. Неравенство (2.2) есть непосредственное следствие теоремы 1.3 той же главы

с $g(x) = P(x, y)$ и $h(x) = u(x, y)$ (напомним, что лемма 1.17 утверждает, что $g = P(\cdot, y) \in L^1(E_n)$ и $\|g\|_1 = 1$). Гармоничность функции u можно доказать, используя гармоничность ядра Пуассона и проведя рассуждение, полностью аналогичное использованному в начале доказательства теоремы 1.10.

Если f непрерывна и ограничена, то $u(x, y)$ сходится к $f(x)$ при $y \to 0$ для всех $x \in E_n$, так как условие (1.24) гл. I, очевидно, всюду выполняется (см. теорему 1.25 гл. I). Для доказательства равномерной сходимости на компактных подмножествах $F \subset E_n$ достаточно провести следующее простое рассуждение: пусть дано $\varepsilon > 0$; тогда существует $\delta > 0$, такое, что $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in F$ и $|t| < \delta$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
|u(x, y) - f(x)| &= \left| \int_{E_n} f(x-t) P(t, y)\, dt - f(x) \right| = \\
&= \left| \int_{E_n} f(x-t) P(t, y)\, dt - \int_{E_n} f(x) P(t, y)\, dt \right| \leqslant \\
&\leqslant \int_{|t| \leqslant \delta} |f(x-t) - f(x)| P(t, y)\, dt + \\
&\qquad + \int_{|t| > \delta} |f(x-t) - f(x)| P(t, y)\, dt \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon \int_{E_n} P(t, y)\, dt + 2\|f\|_\infty \int_{|t| > \delta} P(t, y)\, dt = \\
&= \varepsilon \cdot 1 + 2\|f\|_\infty \int_{|t| > \delta} P(t, y)\, dt.
\end{aligned}
$$

Но если $\delta > 0$ фиксировано, то $\int_{|t|>\delta} P(t, y)\, dt \leqslant c_n y \int_{|t|>\delta} |t|^{-(n+1)}\, dt$ стремится к 0 при $y \to 0$. Таким образом, $|u(x, y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ при достаточно малом y для всех $x \in F$. Если $f \in C_0$, то f равномерно непрерывна и, следовательно, существует такое $\delta > 0$, что $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in E_n$ при $|t| < \delta$. Отсюда следует равномерная сходимость $u(x, y)$ к $f(x)$ при $y \to 0$. Это доказывает теорему[1].

---

[1] Сходимость $\|u(\cdot, y) - f\|_\infty \to 0$ при $f \in C_0$ есть частный случай теоремы 1.18 гл. I. Данное там доказательство части (b) основано на следующих трех свойствах ядра Пуассона: (i) $P(x, y) \geqslant 0$; (ii) $\int_{E_n} P(x, y)\, dx = 1$ при всех $y > 0$; (iii) если $\delta > 0$, то $\int_{|x|>\delta} P(x, y)\, dx \to 0$ при $y \to 0$ ((i) очевидно, (iii) только что было

Пространство $L^1(E_n)$ естественным образом вкладывается в пространство $M(E_n)$ конечных борелевских мер на E_n (см. доказательство теоремы 3.19 гл. I). Многие результаты и понятия, связанные с первым из этих пространств, могут быть расширены на второе. В первой главе, например, мы это сделали для преобразования Фурье, операции свертки и теоремы 1.3. Подобным образом можно поступить с теоремой 2.1:

Теорема 2.3. *Пусть* $\mu \in M(E_n)$, *и пусть* $u(x, y) = \int_{E_n} P(x-t, y)\, d\mu(t)$ — *интеграл Пуассона — Стилтьеса меры* μ; *тогда* u — *гармоническая в* E_{n+1}^{+} *функция и*

$$\|u(\cdot, y)\|_1 = \int_{E_n} |u(x, y)|\, dx \leqslant \|\mu\|, \tag{2.4}$$

где $\|\mu\|$ — *полная вариация* $|\mu|(E_n)$ *меры* μ. *Далее,*

$$\lim_{y\to 0} \int_{E_n} u(x, y)\, \varphi(x)\, dx = \int_{E_n} \varphi(x)\, d\mu(x)$$

для всех $\varphi \in C_0$, *т. е.* $u(\cdot, y)$ *сходится к* μ *в слабой* топологии.*

Доказательство. Гармоничность функции u можно доказать теми же рассуждениями, которые были использованы при доказательстве теоремы 1.10 (и теоремы 2.1). Неравенство (2.4) есть непосредственное следствие обобщения на борелевские меры теоремы 1.3 гл. I, описанного после формулировки этой теоремы. Слабую* сходимость можно доказать следующим образом. Пусть $\varphi \in C_0$ и $v(x, y)$ — ее интеграл Пуассона; тогда

$$\int_{E_n} u(x, y)\, \varphi(x)\, dx = \int_{E_n} \left(\int_{E_n} P(x-t, y)\, d\mu(t) \right) \varphi(x)\, dx =$$
$$= \int_{E_n} \left(\int_{E_n} P(x-t, y)\, \varphi(x)\, dx \right) d\mu(t) =$$
$$= \int_{E_n} v(t, y)\, d\mu(t).$$

доказано, а (ii) составляет часть (b) леммы 1.17 гл. I). Ядро, обладающее этими свойствами, часто называют *приближением единицы*. Ясно, что ядро Гаусса — Вейерштрасса также обладает этими свойствами. Заметим, что небольшое изменение последней части доказательства утверждения (b) (замена L^∞-нормы на L^p-норму, $1 \leqslant p < \infty$) дает другое доказательство теоремы 1.18 с $\varphi(x) = P(x, 1)$. Преимущество подобного подхода состоит в том, что он не использует операцию свертки (см., например, теорему 1.9, где аналогичные свойства (a), (b) и (c) позволяют получить решение задачи Дирихле для шара, т. е. теорему 1.10). Ниже, в теореме 5.6 гл. III, этот тип L^p-сходимости доказывается такими же методами для интеграла Пуассона другого вида.

Следовательно, в силу части (b) теоремы 2.1, $\| v\ (\cdot, y) - \varphi \|_\infty \to 0$ при $y \to 0$,

$$\left| \int_{E_n} u(x, y)\, \varphi(x)\, dx - \int_{E_n} \varphi(t)\, d\mu(t) \right| = \left| \int_{E_n} \{v(t, y) - \varphi(t)\}\, d\mu(t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{E_n} |v(t, y) - \varphi(t)|\, |d\mu|(t) \leqslant$$

$$\leqslant \| v(\cdot, y) - \varphi \|_\infty |\mu|(E_n) \to 0$$

при $y \to 0$, и теорема доказана.

Главный результат этого параграфа составляет доказательство обращения теоремы 2.1. Неравенство (2.2) утверждает, что L^p-нормы $\| u\ (\cdot, y) \|_p$ ограничены при $y > 0$. Покажем, что этого достаточно для того, чтобы функция u была интегралом Пуассона.

Теорема 2.5. *Пусть $u\ (x, y)$ — гармоническая в E_{n+1}^+ функция и существуют постоянные $c > 0$ и p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, такие, что*

$$\| u(\cdot, y) \|_p = \left(\int_{E_n} | u(x, y) |^p\, dx \right)^{1/p} \leqslant c < \infty$$

для всех $y > 0$; тогда

(a) *при $1 < p \leqslant \infty$ функция $u\ (x, y)$ есть интеграл Пуассона некоторой функции f из $L^p\ (E_n)$;*

(b) *при $p = 1$ функция $u\ (x, y)$ есть интеграл Пуассона — Стилтьеса некоторой конечной борелевской меры; если, кроме того, $u\ (\cdot, y)$ фундаментальна по L^1-норме при $y \to 0$, то $u\ (x, y)$ есть интеграл Пуассона некоторой функции f из $L^1\ (E_n)$.*

Доказательство. Если $1 < p \leqslant \infty$ и $\| u(\cdot, y) \|_p \leqslant c < \infty$ при всех $y > 0$, то существуют последовательность $\{y_k\}$, $\lim\limits_{k \to \infty} y_k = 0$, и функция f из $L^p(E_n)$, такие, что $u(\cdot, y_k)$ слабо сходится к f при $k \to \infty$. Таким образом, для всех $g \in L^{p'}\ (E_n)$, $1/p + 1/p' = 1$, существует

$$\lim_{k \to \infty} \int_{E_n} u(x, y_k)\, g(x)\, dx = \int_{E_n} f(x)\, g(x)\, dx.$$

Если $p = 1$, то существует конечная борелевская мера μ, равная слабому* пределу последовательности $\{u\ (\cdot, y_k)\}$, т. е. для всех $g \in C_0$ существует

$$\lim_{k \to \infty} \int_{E_n} u(x, y_k)\, g(x)\, dx = \int_{E_n} g(x)\, d\mu(x)\ ^{1)}.$$

---

[1] Эти утверждения являются частными случаями того, что единичный шар в пространстве, сопряженном к банахову пространству, компактен в слабой* топологии. Последнее утверждение в случае $p = 1$ часто называют теоремой Хелли (см. библиографические замечания к гл. I).

Так как $P(\cdot, y)$ при каждом $y > 0$ принадлежит $L^{p'}(E_n)$, $1 \leqslant p' \leqslant \infty$, и, кроме того, принадлежит C_0, то, в частности, имеем

$$\lim_{k \to \infty} \int_{E_n} P(x-t, y)\, u(t, y_k)\, dt = \int_{E_n} P(x-t, y)\, f(t)\, dt = v(x, y)$$

при $1 < p \leqslant \infty$ и

$$\lim_{k \to \infty} \int_{E_n} P(x-t, y)\, u(t, y_k)\, dt = \int_{E_n} P(x-t, y)\, d\mu(t) = v(x, y)$$

при $p = 1$.

Если мы покажем, что в обоих случаях $v(x, y) = u(x, y)$, то утверждение (a) и первая часть (b) будут установлены. Но указанное равенство непосредственно вытекает из следующих двух лемм (так как из них видно, что $u(x, y + y_k) = \int_{E_n} P(x-t, y)\, u(t, y_k)\, dt$):

Лемма 2.6. *Если функция $u(x, y)$ удовлетворяет предположениям теоремы* 2.5, *то существует постоянная $A = A_{n,p} > 0$, такая, что*

$$\|u(\cdot, y)\|_\infty = \sup_{x \in E_n} |u(x, y)| \leqslant Acy^{-n/p}.$$

В частности, и ограничена в каждом собственном подполупространстве

$$E^+_{n+1, y_0} = \{(x, y) \in E_{n+1};\ y \geqslant y_0 > 0\} \subset E^+_{n+1}.$$

Лемма 2.7. *Если $u(x, y)$ — гармоническая в E^+_{n+1} функция, ограниченная в каждом собственном подполупространстве, то*

$$u(x, y_1 + y_2) = \int_{E_n} u(t, y_1)\, P(x-t, y_2)\, dt$$

для всех $y_1, y_2 > 0$.

Первая из этих лемм есть простое следствие теоремы о среднем для гармонических функций. В самом деле, пусть Ω_{n+1} — объем единичного шара в E_{n+1}; тогда $\Omega_{n+1} = \omega_n/(n+1)$ и

$$u(x, y) = u(x, y) \frac{n+1}{(y/2)^{n+1}} \int_0^{y/2} r^n dr =$$

$$= [(n+1)\, 2^{n+1}/y^{n+1}] \int_0^{y/2} \mathcal{M}_{(x,y),u}(r)\, r^n dr =$$

$$= [(n+1)\, 2^{n+1}/y^{n+1}\omega_n] \times$$

$$\times \int_0^{y/2} \left\{ \int_{\Sigma_n} u(x_1 + rt_1', \ldots, x_n + rt_n', y + rt_{n+1}')\, dt' \right\} r^n dr =$$

$$= (2^{n+1}/\Omega_{n+1})\, y^{-(n+1)} \int_{|t| \leqslant y/2} u(x_1 + t_1, \ldots, x_n + t_n, y + t_{n+1})\, dt.$$

Следовательно, полагая $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta) = (\xi, \eta)$ и $A = (2^{n+1}/\Omega_{n+1})^{1/p}$, получим

$$|u(x, y)| \leqslant (2^{n+1}/\Omega_{n+1})\, y^{-(n+1)} \int_{|(x,y)-(\xi,\eta)| < y/2} |u(\xi, \eta)|\, d\xi d\eta \leqslant$$

$$\leqslant (2^{n+1}/\Omega_{n+1})\, y^{-(n+1)} \left(\int_{|(x,y)-(\xi,\eta)| < y/2} |u(\xi, \eta)|^p\, d\xi d\eta \right)^{1/p} \times$$

$$\times (\Omega_{n+1} y^{n+1}/2^{n+1})^{1-1/p} \leqslant$$

$$\leqslant A y^{-(n+1)/p} \left[\int_{y/2}^{3y/2} \left\{ \int_{\xi \in E_n} |u(\xi, \eta)|^p d\xi \right\} d\eta \right]^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant A y^{-(n+1)/p} \left[\int_{y/2}^{3y/2} c^p d\eta \right]^{1/p} = Acy^{-(n+1)/p} y^{1/p} = Acy^{-n/p}.$$

Для того чтобы доказать лемму 2.7, фиксируем $y_0 > 0$ и положим $w(x, y) = u(x, y + y_0)$ для $y_0 > 0$. Положим $w_1(x, y) = \int_{E_n} u(t, y_0) P(x - t, y)\, dt$ для $(x, y) \in E_{n+1}^+$. Лемма будет установлена, если мы покажем, что $w \equiv w_1$. Из леммы 2.6 следует, что функция w гармонична в E_{n+1}^+ и непрерывна и ограничена на $\overline{E_{n+1}^+}$. В силу теоремы 2.1 (a) и (b), w_1 можно продолжить на $\overline{E_{n+1}^+}$, положив $w_1(x, 0) = u(x, y_0)$, причем полученная функция будет непрерывной и ограниченной на $\overline{E_{n+1}^+}$ и гармонической в E_{n+1}^+. Таким образом, функция $h = w_1 - w$ также непрерывна и ограничена на $\overline{E_{n+1}^+}$ и гармонична в E_{n+1}^+. Так как $h(x, 0) = 0$ для всех $x \in E_n$, то, в силу следствия 1.15, h тождественно равна 0. Отсюда вытекает требуемое тождество $w \equiv w_1$.

Осталось еще доказать последнюю часть теоремы 2.5. Если $u(\cdot, y)$ фундаментальна по L^1-норме, то из полноты $L^1(E_n)$ следует, что существует $f \in L^1(E_n)$, для которой $\|u(\cdot, y) - f\|_1 \to 0$ при $y \to 0$. Следовательно, $\int_{E_n} u(x, y) g(x)\, dx \to \int_{E_n} f(x) g(x)\, dx$ для всех $g \in L^\infty(E_n)$. Применяя теперь те же самые рассуждения

какие были использованы при доказательстве части (а) теоремы 2.5, можно показать, что u есть интеграл Пуассона функции f из L^1.

3. Максимальные функции Харди — Литтлвуда и некасательная сходимость гармонических функций

До сих пор рассматривался только один тип сходимости на границе для определенных в E_{n+1}^+ гармонических функций. Было показано, например, что если u — интеграл Пуассона, то для почти всех точек $x_0 \in E_n$ существует граничное значение

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u(x, y), \tag{3.1}$$

когда точка (x, y) приближается к $(x_0, 0)$ «сверху» вдоль линии $x = x_0$ (см. теорему 2.1). Однако справедлив один важный более общий результат; предел (3.1) существует почти всюду даже тогда, когда (x, y) приближается к $(x_0, 0)$ по более общим путям, так называемым *некасательным* путям. Прежде чем уточнять это понятие, следует изучить один важный оператор — максимальный оператор Харди — Литтлвуда, основные свойства которого будут использованы для доказательства существования этих более общих пределов.

Этот оператор ставит в соответствие каждой функции $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, ее *максимальную функцию*[1] *Харди — Литтлвуда* m_f, *определяемую равенством*

$$m_f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{|t|\leqslant r} |f(x-t)|\, dt = \sup_{S_x} \frac{1}{|S_x|} \int_{S_x} |f(t)|\, dt$$

при $x \in E_n$, где Ω_n — объем (лебегова мера) единичного шара $\{t \in E_n;\ |t| \leqslant 1\}$; в последнем выражении верхняя грань берется по всем шарам S_x положительного радиуса с центром в точке

[1] Излагаемая здесь идея осреднения широко использовалась В. А. Стекловым начиная с 1907 г. (см. Стеклов [1]) в его так называемом методе сглаживания при решении различных проблем математической физики. Применяемая авторами максимальная функция по существу совпадает с *функцией Стеклова*, которая в одномерном случае применялась В. А. Стекловым в виде

$$F(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(\xi)\, d\xi.$$

Основные свойства функции F были подробно изучены В. А. Стекловым в работе [1] и последующих (см. также Стеклов [2]).— *Прим. ред.*

x, а $|S_x|$ — лебегова мера S_x (если радиус шара S_x равен r, то $|S_x| = \Omega_n r^n$). Иногда мы будем называть m_f *шаровой максимальной функцией,* чтобы отличать ее от *кубической максимальной функции* $\overline{m}_f$, определяемой равенством

$$\overline{m}_f(x) = \sup_{Q_x} \frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f(t)|\, dt,$$

где верхняя грань берется по всем невырожденным кубам Q_x с центром в точке x и с ребрами, параллельными осям координат, а $|Q_x|$ обозначает лебегову меру куба Q_x. Ясно, что если f существенно ограничена, то $m_f(x)$ и $\overline{m}_f(x)$ не превосходят $\|f\|_\infty$. Мы покажем, что $m_f(x)$ и $\overline{m}_f(x)$ конечны почти всюду для всех $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Пусть дан шар S_x радиуса $r > 0$ с центром в точке x; обозначим через q_x вписанный куб (он имеет, следовательно, диагонали длины $2r$) и через Q_x описанный куб (он имеет, следовательно, ребра длины $2r$), причем ребра обоих кубов параллельны осям координат. Тогда, очевидно, существуют постоянные a_n и A_n, зависящие только от размерности пространства и такие, что $|Q_x| \leqslant A_n |S_x|$ и $|S_x| \leqslant a_n |q_x|$. Таким образом,

$$\frac{1}{|S_x|} \int_{S_x} |f(t)|\, dt \leqslant \frac{A_n}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f(t)|\, dt.$$

Но отсюда следует, что

$$m_f(x) \leqslant A_n \overline{m}_f(x). \tag{3.2}$$

Аналогично, имеем

$$\overline{m}_f(x) \leqslant a_n m_f(x). \tag{3.2'}$$

Нас больше интересуют шаровые максимальные функции m_f. В некоторых случаях, однако, необходимые оценки легче получить для $\overline{m}_f$. Тогда для получения соответствующих результатов для m_f можно использовать неравенства (3.2) и (3.2′). Следующая лемма позволяет показать, что $\overline{m}_f(x) < \infty$ почти всюду (и, следовательно, $m_f(x) < \infty$ почти всюду).

Лемма 3.3. *Пусть $R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_k$ — непустые открытые параллелепипеды в E_n с ребрами, параллельными осям координат, и центрами в 0. Пусть S — ограниченное множество в E_n и для каждого $x \in S$ определено целое число $i(x)$, $1 \leqslant i(x) \leqslant k$. Введем обозначение*

$$R^x = \{u \in E_n;\ u - x \in R_{i(x)}\};$$

тогда существует конечное число точек $x_1, \ldots, x_l$ из S, таких, что $S \subset R^{x_1} \cup \ldots \cup R^{x_l}$ и каждая точка $v \in E_n$ лежит не более чем в 2^n множествах из семейства $\{R^{x_1}, \ldots, R^{x_l}\}$.

Доказательство. Выберем x_1 так, чтобы $i(x_1)$ было наибольшим из возможных (это можно сделать, так как $i(x) \leqslant k$). После этого выберем $x_2 \in S \setminus R^{x_1}$ так, чтобы $i(x_2)$ было наибольшим из возможных, затем выберем $x_3 \in S \setminus \{R^{x_1} \cup R^{x_2}\}$ так, чтобы $i(x_3)$ было максимальным, и т. д. Таким образом мы получим последовательность открытых параллелепипедов $R^{x_1}, R^{x_2}, \ldots$ с центрами в точках $x_1, x_2, \ldots$, таких, что ни один центр x_j не содержится ни в каком параллелепипеде R^{x_i}, $j \neq i$. Но это означает, что расстояние между x_i и x_j, $i \neq j$, должно быть больше половины длины самого короткого ребра параллелепипеда R_1 (наименьшего параллелепипеда). По предположению, эта полудлина положительна и множество S ограничено, поэтому отсюда следует, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$ конечна и что на некотором, скажем l-м, шаге будет получено покрытие $\{R^{x_1}, \ldots, R^{x_l}\}$ множества S.

Осталось еще показать, что каждая точка $v \in E_n$ может лежать не более чем в 2^n из параллелепипедов $R^{x_1}, \ldots, R^{x_l}$. Для того чтобы это сделать, рассмотрим гиперплоскости, проходящие через v и параллельные координатным гиперплоскостям. Они образуют 2^n «октантов» с вершинами в точке v, покрывающие все E_n. Предположим, что две точки x_i и x_j $(1 \leqslant i, j \leqslant l)$, лежащие в одном и том же октанте, таковы, что R^{x_i} и R^{x_j} оба содержат точку v. Так как каждый из этих двух параллелепипедов есть сдвиг одного из параллелепипедов $R_1, \ldots, R_k$, то один из них, скажем R^{x_i}, должен иметь ребра по крайней мере такой же длины, как у другого, т. е. R^{x_j}. Но отсюда и из предположения $v \in R^{x_i} \cap R^{x_j}$ следует, что $x_j \in R^{x_i}$. Поскольку, по построению, x_j не содержится ни в одном из параллелепипедов R^{x_i}, $i \neq j$, то отсюда следует, что самое большее один параллелепипед с центром в данном «октанте» может содержать точку v. Лемма доказана.

Теорема 3.4. *Существует постоянная $c = c(n)$, зависящая только от размерности, такая, что для всех $f \in L^1(E_n)$ и*

$$F_s = \{x \in E_n;\ m_f(x) > s > 0\}$$

справедлива оценка

$$|F_s| \leqslant \frac{c\|f\|_1}{s},$$

где $|F_s|$ — лебегова мера множества F_s. В частности, $m_f(x) < \infty$ для почти всех $x \in E_n$.

Доказательство. Предположим, что

$$|\{x \in E_n;\ \overline{m}_f(x) > s\}| \leqslant 2^n \frac{\|f\|_1}{s} \tag{3.5}$$

для всех $s > 0$. Тогда, в силу (3.2), имеем $F_s \subset \{x \in E_n;\ \overline{m}_f(x) > s/A_n\}$; следовательно,

$$|F_s| \leqslant \left|\left\{x \in E_n;\ \overline{m}_f(x) > \frac{s}{A_n}\right\}\right| \leqslant \frac{2^n A_n \|f\|_1}{s},$$

и теорема справедлива с $c = 2^n A_n$.

Пусть S — произвольное компактное подмножество из $\{x \in E_n;\ \overline{m}_f(x) > s\}$. Тогда для каждого $x \in S$ существует куб Q_x, такой, что

$$\frac{1}{|Q_x|} \int\limits_{Q_x} |f(t)|\, dt > s.$$

В силу непрерывности интеграла найдется окрестность U точки x, такая, что для всех u из U

$$\frac{1}{|Q_u|} \int\limits_{Q_u} |f(t)|\, dt > s,$$

где $Q_u = \{(w - x) + u;\ w \in Q_x\}$ — куб такого же размера, что и Q_x, с центром в точке u. Так как S — компакт, то существует конечное число таких окрестностей, покрывающих S. Таким образом, существует конечное число кубов $Q_1 \subset \ldots \subset Q_k$ с центрами в 0, таких, что для каждого $x \in S$ существует целое число $i(x)$, $1 \leqslant i(x) \leqslant k$, для которого

$$\frac{1}{|Q^x|} \int\limits_{Q^x} |f(t)|\, dt > s,$$

где $Q^x = \{u \in E_n;\ u - x \in Q_{i(x)}\}$. По лемме 3.3 существует конечное число точек $x_1, \ldots, x_l$ из S, таких, что

$$S \subset Q^{x_1} \cup \ldots \cup Q^{x_l}$$

и каждая точка $v \in E_n$ лежит не более чем в 2^n из этих кубов. Для произвольного множества A обозначим через $\chi[A]$ его характеристическую функцию. Тогда последнее свойство эквивалентно неравенству

$$\sum_{j=1}^{l} \chi[Q^{x_j}] \leqslant 2^n \chi\left[\bigcup_{j=1}^{l} Q^{x_j}\right].$$

Таким образом,

$$|S| \leqslant \left|\bigcup_{j=1}^{l} Q^{x_j}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{l} |Q^{x_j}| \leqslant \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{l} \int\limits_{Q^{x_j}} |f(t)|\, dt =$$

$$= \frac{1}{s} \int\limits_{E_n} \left\{ \sum_{j=1}^{l} \chi \left[Q^{x_j} \right] (t) \right\} | f(t) | \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^n}{s} \int\limits_{E_n} \chi \left[\bigcup_{j=1}^{l} Q^{x_j} \right] (t) \, | f(t) | \, dt \leqslant \frac{2^n}{s} \| f \|_1.$$

Поскольку S — произвольное компактное подмножество из $\{ x \in \in E_n;\ \overline{m}_f(x) > s \}$, неравенство (3.5), а значит, и теорема непосредственно следуют отсюда.

Мы уже отмечали, что $m_g(x) \leqslant \| g \|_\infty < \infty$ для всех $g \in L^\infty(E_n)$. Из теоремы 3.4 получаем, что $m_f(x) < \infty$ для почти всех x при $f \in L^1(E_n)$. Из этих двух утверждений следует, что $m_h(x) < \infty$ для всех $h \in L^p(E_n)$, $1 < p \leqslant \infty$. Для того чтобы в этом убедиться, заметим сначала, что максимальный оператор есть пример *сублинейного оператора*. Под этим мы понимаем оператор T, отображающий линейное пространство измеримых функций, определенных на пространстве с мерой, в пространство измеримых функций, определенных (возможно) на другом пространстве с мерой, и удовлетворяющий условию

(i) $$| [T(f+g)](x) | \leqslant | (Tf)(x) | + | (Tg)(x) |$$

почти всюду (это свойство называется *субаддитивностью*) и условию

(ii) $$| T(af) | = | a | \, | Tf |$$

для всех скаляров a и функций f из области определения T. Пусть $h \in L^p(E_n)$; положим

$$g(x) = \begin{cases} h(x) & \text{при} \quad | h(x) | \leqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad | h(x) | > 1 \end{cases}$$

и $f = h - g$. Тогда $g \in L^\infty(E_n)$, $f \in L^1(E_n)$. В силу свойства (i) (субаддитивность), имеем

$$m_h(x) = m_{f+g}(x) \leqslant m_f(x) + m_g(x).$$

Следовательно, $m_h(x) < \infty$ для почти всех x. Все эти замечания, очевидно, справедливы и для кубической максимальной функции.

Максимальный оператор, рассматриваемый как отображение, определенное на $L^1(E_n)$, не является ограниченным преобразованием в $L^1(E_n)$ (например, если f — характеристическая функция интервала $[0, 1]$, то m_f даже не интегрируема). Теорема 3.4, однако, утверждает, что оно «почти» ограничено. Для того чтобы сделать это утверждение более точным, введем понятие *функции распределения* $\lambda = \lambda_g$ функции $g \in L^p(E_n)$: пусть $s > 0$; тогда $\lambda(s)$ есть ле-

бегова мера множества $F_s = \{x \in E_n;\ |g(x)| > s\}$ [1]. Таким образом мы получим невозрастающую функцию, определенную на положительной полуоси. Ясно, что $s^p\lambda(s) = \int\limits_{F_s} s^p dx \leqslant \int\limits_{F_s} |g|^p dx \leqslant \|g\|_p^p$.

Следовательно, $\lambda(s)$ мажорируется постоянной, умноженной на s^{-p}. Это условие, очевидно, недостаточно для интегрируемости $|g|^p$. С другой стороны, равенство

$$\|g\|_p^p = -\int\limits_0^\infty s^p d\lambda(s) = p\int\limits_0^\infty s^{p-1}\lambda(s)\,ds, \tag{3.6}$$

которое легко доказывается для простых функций g (общий случай получается отсюда приближением $|g|$ снизу простыми функциями), указывает, что условие $\lambda(s) \leqslant \mathrm{const}\ s^{-p}$ близко к тому, чтобы быть критерием конечности $\int |g|^p dx$. Теорема 3.4 утверждает, что m_f имеет функцию распределения λ, удовлетворяющую неравенству $\lambda(s) \leqslant c\|f\|_1 s^{-1}$. В этом смысле говорят, что максимальный оператор почти ограничен как оператор на $L^1(E_n)$.

Однако сужение максимального оператора на $L^p(E_n)$, $1 < p \leqslant \infty$, ограничено.

Теорема 3.7. *Существует постоянная $b = b(p, n)$, зависящая от размерности n и показателя $p > 1$, такая, что*

$$\|m_f\|_p \leqslant b\|f\|_p$$

для всех $f \in L^p(E_n)$.

Доказательство. Пусть $f \in L^p(E_n)$, $1 < p \leqslant \infty$ и $s > 0$. Для каждого $x \in E_n$ положим

$$f^s(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } |f(x)| > s, \\ 0 & \text{при } |f(x)| \leqslant s \end{cases}$$

и

$$f_s(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |f(x)| > s, \\ f(x) & \text{при } |f(x)| \leqslant s. \end{cases}$$

Тогда $f = f^s + f_s$, где $f^s \in L^1(E_n)$ и $f_s \in L^\infty(E_n)$. Обозначим λ, λ^s, λ_s функции распределения функций m_f, m_{f^s} и m_{f_s}. Так как, в силу субаддитивности, $m_f \leqslant m_{f^s} + m_{f_s}$, то $\lambda(2s) \leqslant \lambda^s(s) + \lambda_s(s)$. Вспоминая, что максимальная функция существенно ограниченной

[1] Функцию распределения функции g, очевидно, можно определить в более общем случае для любой измеримой функции на произвольном пространстве с мерой. Многие свойства этих более общих функций распределения изучаются в гл. V.

функции g ограничена величиной $\|g\|_\infty$, получим, что $m_{f_s}(x) \leqslant \leqslant \|f_s\|_\infty \leqslant s$ и, следовательно, $\lambda_s(s) = 0$. Таким образом, $\lambda(2s) \leqslant \leqslant \lambda^s(s)$.

Из последнего неравенства, равенства (3.6) и теоремы 3.4 получаем

$$\|m_f\|_p^p = p2^p \int_0^\infty s^{p-1}\lambda(2s)\,ds \leqslant p2^p \int_0^\infty s^{p-1}\lambda^s(s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant p2^p \int_0^\infty s^{p-1}cs^{-1}\left\{\int_{E_n} |f^s(x)|\,dx\right\} ds =$$

$$= p2^p c \int_0^\infty s^{p-2}\left\{\int_{|f(x)|>s} |f(x)|\,dx\right\} ds =$$

$$= p2^p c \int_{E_n} |f(x)| \left\{\int_0^{|f(x)|} s^{p-2}ds\right\} dx =$$

$$= \frac{p2^p c}{p-1} \int_{E_n} |f(x)|\,|f(x)|^{p-1}dx,$$

что доказывает теорему, причем $b = b(p, n) = 2\,[pc/(p-1)]^{1/p}$.

Другой способ описания m_f состоит в следующем. Пусть φ — характеристическая функция единичного шара $\{x \in E_n;\ |x| \leqslant 1\}$, деленная на Ω_n $\left(\text{так что} \int_{E_n} \varphi(x)\,dx = 1\right)$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и положим $\varphi_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-n}\varphi(t/\varepsilon)$. Тогда, если $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то, полагая ради упрощения обозначений $f \geqslant 0$, имеем

$$(f * \varphi_\varepsilon)(x) = \frac{1}{\varepsilon^n \Omega_n} \int_{|t| \leqslant \varepsilon} f(x-t)\,dt;$$

следовательно,

$$m_f(x) = \sup_{\varepsilon>0} (f * \varphi_\varepsilon)(x). \tag{3.8}$$

Аналогично, если φ — характеристическая функция куба $\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n;\ -{}^1\!/_2 \leqslant x_j \leqslant {}^1\!/_2,\ j = 1, \ldots, n\}$, то правая часть равенства (3.8) определяет $\overline{m}_f(x)$. Мы видели, что функции $\overline{m}_f$ и m_f «эквивалентны» в том смысле, что выполняются неравенства (3.2) и (3.2′). Естественно, следовательно, поставить вопрос о соотношении между m_f и верхней гранью в (3.8), когда φ — неотрицательная функция более общего вида.

Положим, например, $\varphi = \sum_{k=1}^m c_k \chi_k$, $c_k > 0$, где χ_k — характеристическая функция шара $\sigma_k = \{x \in E_n;\ |x| \leqslant r_k\}$. Тогда для $f \geqslant 0$

имеем

$$(f*\varphi_\varepsilon)(x)=\sum_{k=1}^{m}c_k\varepsilon^{-n}\int\limits_{|t|\leqslant\varepsilon r_k}f(x-t)\,dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}c_kr_k^n\Omega_n\frac{1}{\Omega_n(\varepsilon r_k)^n}\int\limits_{|t|\leqslant\varepsilon r_k}f(x-t)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant m_f(x)\sum_{k=1}^{m}c_k|\sigma_k|=m_f(x)\|\varphi\|_1,$$

т. е.

$$\sup_{\varepsilon>0}(f*\varphi_\varepsilon)(x)\leqslant m_f(x)\|\varphi\|_1. \tag{3.9}$$

Очевидно, этот результат обобщается на любую функцию $\varphi\in L^1(E_n)$ вида $\varphi(t)=\psi(|t|)$ (т. е. на радиальную функцию φ), где ψ — неотрицательная убывающая функция на $[0,\infty)$. Нужно только аппроксимировать φ снизу возрастающей последовательностью простых функций только что рассмотренного типа и применить теорему Лебега о монотонной сходимости.

В частности, если выбрать $\varphi(t)=c_n/(|t|^2+1)^{(n+1)/2}$, то $u(x,y)=(f*\varphi_y)(x)$, $y>0$, будет интегралом Пуассона функции f, и мы получим следующую теорему:

Теорема 3.10. *Пусть $u(x,y)$, $y>0$, — интеграл Пуассона функции $f\in L^p(E_n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$; тогда $|u(x,y)|\leqslant m_f(x)$.*

Нетрудно установить и обратное утверждение:

Теорема 3.11. *Пусть существует интеграл Пуассона*

$$u(x,y)=\int\limits_{E_n}f(x-t)P(t,y)\,dt,\quad y>0,$$

некоторой функции $f\geqslant0$ (например, $f\in L^p(E_n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$); тогда существует постоянная $A=A(n)$, зависящая только от размерности, такая, что

$$m_f(x)\leqslant A\{\sup_{y>0}u(x,y)\}.$$

Доказательство. Фиксируем $r>0$; тогда

$$\sup_{y>0}u(x,y)\geqslant u(x,r)=c_n\int\limits_{E_n}f(x-t)\frac{r}{(|t|^2+r^2)^{(n+1)/2}}\,dt\geqslant$$

$$\geqslant c_n\int\limits_{|t|\leqslant r}f(x-t)\,r^{-n}dt=$$

$$=c_n\Omega_n\left\{\frac{1}{\Omega_nr^n}\int\limits_{|t|\leqslant r}f(x-t)\,dt\right\}.$$

Таким образом, взяв верхнюю грань выражения в правой части по всем $r > 0$, получим утверждение теоремы с $A(n) = 1/c_n \Omega_n$.

Значение максимального оператора заключается в том, что он мажорирует многие важные операторы анализа. Мы только что убедились в этом на примере интеграла Пуассона. Следующая теорема дает нам метод использования этого мажорирующего свойства для получения результатов о поточечной сходимости для многих семейств операторов, которые нам встретятся далее.

Теорема 3.12. *Пусть $\{T_\varepsilon\}$, $0 < \varepsilon$, — семейство линейных операторов, отображающих $L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, в пространство измеримых на E_n функций. Для каждой функции $h \in L^p(E_n)$ определим Mh, полагая $(Mh)(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |(T_\varepsilon h)(x)|$, $x \in E_n$. Предположим, что существуют постоянная $a > 0$ и вещественное число $q \geqslant 1$, такие, что*

$$|\{x;\ (Mh)(x) > \lambda\}| \leqslant (a\|h\|_p \lambda^{-1})^q \tag{3.13}$$

для всех $\lambda > 0$ и $h \in L^p(E_n)$. Если существует плотное подмножество $\mathcal{D}$ пространства $L^p(E_n)$, такое, что $\lim_{\varepsilon \to 0}(T_\varepsilon g)(x)$ существует и конечен почти всюду для всех $g \in \mathcal{D}$, то $\lim_{\varepsilon \to 0}(T_\varepsilon f)(x)$ также существует и конечен почти всюду для всех $f \in L^p(E_n)$.

Доказательство. Пусть f — функция из $L^p(E_n)$. Для каждого $k > 0$ обозначим через F_k множество всех $x \in E_n$, таких, что $|(T_{\varepsilon'}f)(x) - (T_{\varepsilon''}f)(x)| > 2k^{-1}$ для бесконечного числа пар $(\varepsilon', \varepsilon'')$, стремящихся к $(0, 0)$. Для каждого $\eta > 0$ найдутся g и h из $L^p(E_n)$, такие, что $f = g + h$, $g \in \mathcal{D}$, и $\|h\|_p < \eta$. Если мы докажем, что $|F_k| \leqslant (2a(k+1)\eta)^q$, то ввиду произвольности η это будет означать, что F_k имеет меру 0. Тогда $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ также имеет меру 0 и $\lim_{\varepsilon \to 0}(T_\varepsilon f)(x)$ существует и конечен для всех $x \in E_n \setminus F$, что и требовалось доказать.

Обозначим через G множество всех $x \in E_n$, таких, что $\lim_{\varepsilon \to 0}(T_\varepsilon g)(x)$ существует и конечен. Так как $E_n \setminus G$ имеет меру 0, то достаточно показать, что $|F_k \cap G| \leqslant (2a(k+1)\eta)^q$. Поскольку $(T_{\varepsilon'}f)(x) - (T_{\varepsilon''}f)(x) = \{(T_{\varepsilon'}h)(x) - (T_{\varepsilon''}h)(x)\} + \{(T_{\varepsilon'}g)(x) - (T_{\varepsilon''}g)(x)\}$ и $\lim_{\varepsilon', \varepsilon'' \to 0}\{(T_{\varepsilon'}g)(x) - (T_{\varepsilon''}g)(x)\} = 0$ для всех $x \in G$, то, следовательно, $F_k \cap G$ содержится в множестве всех $x \in E_n$, таких, что $|(T_{\varepsilon'}h)(x) - (T_{\varepsilon''}h)(x)| \geqslant k^{-1}$ для бесконечного числа пар $(\varepsilon', \varepsilon'')$, стремящихся к $(0, 0)$. Для каждого такого x заведомо справедливо неравенство

$(Mh)(x) \geqslant (2k)^{-1}$; следовательно, $F_k \cap G \subset \{x \in E_n;\ (Mh)(x) > > 2^{-1}(k+1)^{-1}\}$. Отсюда и из предположений теоремы следует искомое неравенство $|F_k \cap G| \leqslant (a\eta 2(k+1))^q$.

Пример такого семейства операторов мы получим, определив $T_\varepsilon f$, $\varepsilon > 0$, равенством

$$(T_\varepsilon f)(x) = (\varepsilon^n \Omega_n)^{-1} \int\limits_{|t|<\varepsilon} f(x-t)\,dt$$

для всех $x \in E_n$. В этом случае $Mf = m_f$ и, в силу теоремы 3.4, справедливо неравенство

$$|\{x;\ (Mf)(x) > \lambda\}| \leqslant c\|f\|_1 \lambda^{-1}$$

при $f \in L^1(E_n)$. Более того, если g принадлежит к классу непрерывных функций с компактным носителем (плотному подмножеству $L^1(E_n)$), то очевидно, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon g)(x) = g(x)$. Тогда, по теореме 3.12, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon f)(x)$ существует и конечен для почти всех x. Отсюда легко следует, что почти каждая точка x является точкой дифференцируемости интеграла функции f (см. гл. I, (1.23) и (1.24)); более точно, справедливо

Следствие 3.14. *Если f — локально интегрируемая на E_n функция (т. е. f интегрируема на любом ограниченном подмножестве E_n), то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-n} \int\limits_{|t|<\varepsilon} [f(x-t) - f(x)]\,dt = 0$$

для почти всех $x \in E_n$.

Доказательство. В силу локальности задачи, можно считать, что $f \in L^1(E_n)$ (в противном случае можно умножить f на характеристическую функцию шара радиуса r с центром в 0 и получить требуемую сходимость почти во всех точках внутри этого шара, а затем, устремив r к ∞, — во всем E_n). Как уже было показано, предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^n\Omega_n)^{-1} \int\limits_{|t|<\varepsilon} f(x-t)\,dt$$

существует и конечен для почти всех x. Осталось только доказать, что этот предел равен $f(x)$ почти всюду. Но

$$\|T_\varepsilon f - f\|_1 = \int\limits_{E_n} \left| \frac{1}{\varepsilon^n\Omega_n} \int\limits_{|t|<\varepsilon} [f(x-t) - f(x)]\,dt \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^n\Omega_n} \int\limits_{|t|<\varepsilon} \left\{ \int\limits_{E_n} |f(x-t) - f(x)|\,dx \right\} dt \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$, так как L^1-модуль непрерывности $\omega_{1,f}(t) \to 0$ при $|t| \to \to 0$ (см. доказательство теоремы 1.18 гл. I). Значит, существует последовательность $\{\varepsilon_k\}$, сходящаяся к 0 и такая, что $(T_{\varepsilon_k}f)(x) \to \to f(x)$ почти всюду при $k \to \infty$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}(T_\varepsilon f)(x) = f(x)$ почти всюду.

Этот метод немедленно распространяется на интегралы Пуассона и позволяет получить прямое доказательство теоремы 2.1. Однако мы собираемся обобщить эту теорему так, чтобы включить более общий некасательный подход к границе, о котором было упомянуто в начале параграфа. Уточним сначала это понятие, а затем покажем, что интеграл Пуассона допускает это более общее граничное значение.

Пусть $\alpha > 0$ и $x_0 \in E_n$; тогда *конус в* E_{n+1}^+ *с вершиной в* $(x_0, 0)$ *и раствором* α есть область

$$\Gamma_\alpha(x_0) = \{(x, y) \in E_{n+1}^+;\ |x - x_0| < \alpha y\}.$$

Пусть функция u определена в E_{n+1}^+; говорят, что она имеет *некасательный предел* l в точке $x_0 \in E_n$, если для каждого $\alpha > 0$ существует

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u(x, y) = l, \tag{3.15}$$

когда (x, y) стремится к $(x_0, 0)$ внутри конуса $\Gamma_\alpha(x_0)$.

Важность некасательного подхода к границе станет понятной позднее. В некоторых основных результатах, излагаемых ниже, вертикального подхода к границе недостаточно (см., например, (5.4)).

Теорема 3.16. *Пусть $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$; тогда интеграл Пуассона*

$$\int_{E_n} f(x - t)\, P(t, y)\, dt = u(x, y)$$

имеет некасательный предел $f(x_0)$ во всех точках x_0 лебегова множества функции f, т. е. почти во всех точках E_n.

Доказательство. Заметим сначала, что доказательство теоремы 1.25 гл. I состояло в установлении равенства

$$0 = \lim_{y\to 0}\int_{E_n} |f(x_0 - t) - f(x_0)|\,|\varphi_y(t)|\, dt =$$
$$= \lim_{y\to 0}\int_{E_n} |f(t) - f(x_0)|\,|\varphi_y(x_0 - t)|\, dt$$

для всех точек x_0 лебегова множества функции f. В случае когда $\varphi_y(t)$ есть ядро Пуассона $P(t, y) = c_n[y/(y^2 + |t|^2)^{(n+1)/2}]$, справед-

ливо легко доказываемое неравенство

$$(3.17)\quad P(x-t,\ y)=\varphi_y(x-t)\leqslant d_\alpha\varphi_y(x_0-t)=d_\alpha P(x_0-t,\ y)$$

при $(x,\ y)\in\Gamma_\alpha(x_0)$, где $d_\alpha^{2/(n+1)}=\max\{1+2\alpha^2,\ 2\}$. Таким образом, используя лемму 1.17 (b) гл. I, получим

$$\begin{aligned}|u(x,\ y)-f(x_0)|&=\left|\int\limits_{E_n} f(t)\,P(x-t,\ y)\,dt-f(x_0)\int\limits_{E_n} P(x-t,\ y)\,dt\right|\leqslant\\&\leqslant\int\limits_{E_n}|f(t)-f(x_0)|\,P(x-t,\ y)\,dt\leqslant\\&\leqslant d_\alpha\int\limits_{E_n}|f(t)-f(x_0)|\,P(x_0-t,\ y)\,dt=\\&=d_\alpha\int\limits_{E_n}|f(t)-f(x_0)|\,\varphi_y(x_0-t)\,dt.\end{aligned}$$

Но последний член стремится к 0 при $y\to 0$, так что теорема доказана.

Непосредственное следствие только что доказанной теоремы состоит в том, что интеграл Пуассона *и некасательно ограничен* почти во всех точках E_n. Это означает, что определенная в E_{n+1}^+ функция u ограничена в усеченных конусах $\Gamma_\alpha(x_0)\cap\{(x,\ y)\in E_{n+1};\ 0<y\leqslant 1\}$ для почти всех $x_0\in E_n$ (конусы $\Gamma_\alpha(x_0)$ отсекаются на высоте $y=1$; так как рассматриваемые функции непрерывны в E_{n+1}^+, то высота отсечения не имеет значения). Действительно, используя максимальную функцию m_f, можно получить следующее количественное утверждение:

$$(3.18)\qquad \sup_{(x,y)\in\Gamma_\alpha(x_0)}|u(x,\ y)|\leqslant d_\alpha m_f(x_0).$$

Это простое следствие теоремы 3.10 и неравенства (3.17) для ядра Пуассона.

Следующая теорема (основной математический инструмент, используемый в теории пространств H^p, развиваемой в гл. VI) показывает, что для гармонических функций существование некасательных пределов и некасательная ограниченность по существу эквивалентны.

Теорема 3.19. *Пусть u — функция, гармоническая в E_{n+1}^+ и некасательно ограниченная во всех точках множества положительной меры $S\subset E_n$; тогда u имеет некасательные пределы почти во всех точках S.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что достаточно показать, что для любого множества положительной меры $S\subset E_n$, на котором u некасательно ограничена, найдется его подмножество, также положительной меры, в точках которого u имеет

некасательные пределы. Рассматривая конусы $\Gamma_\alpha(q)$ только с рациональными растворами α, получим, что S есть счетное объединение подмножеств $F = F_{\alpha,m}$, таких, что $|u(x, y)| \leqslant m$ для всех

$$(x, y) \in \{\bigcup_{q \in F} \Gamma_\alpha(q)\} \cap \{p = (x, y); 0 < y < 2\} = \mathcal{A},$$

$m = 1, 2, \ldots$[1]. Это означает, что u равномерно ограничена на множестве $\mathcal{A}$, образованном объединением конгруэнтных вертикальных конусов с вершинами в точках из F, ограниченных сверху гиперплоскостью $y = 2$.

Теперь понятно, что достаточно показать, что $u(p)$ стремится к некоторому пределу, когда p стремится к q внутри $\Gamma_\alpha(q)$, для почти всех $q \in F$. Действительно, если из каждого множества $F = F_{\alpha,m}$ мы удалим точки, в которых это не выполняется (напомним, что α — рациональное и m — натуральное число), то мы удалим множество нулевой меры; если q — точка из S, не принадлежащая этому множеству нулевой меры, и $\beta > 0$ — произвольное рациональное число, то найдется натуральное число k, такое, что $|u(p)| = |u(x, y)| \leqslant k$ для всех $p \in \Gamma_\beta(q)$, $0 < y < 2$, т. е. $q \in F_{\beta,k}$. Следовательно, $u(p)$ стремится к некоторому пределу, когда p стремится к q внутри $\Gamma_\beta(q)$. Таким образом, некасательный предел существует для функции u во всех таких точках q.

Дальнейшее упрощение получим, заметив, что, разделив на m, можно считать, что $|u| \leqslant 1$ в $\mathcal{A}$. Кроме того, можно считать, что S содержится в кубе с единичным ребром, поскольку достаточно доказать теорему для каждого пересечения S с ячейкой разбиения E_n на кубы с единичными ребрами.

Проделав все эти упрощения, положим $\mathcal{D} = \{\bigcup_{q \in F} \Gamma_\alpha(q)\} \cap \{p = (x, y);\ 0 < y < 1\}$, $\mathcal{B} = \partial\mathcal{D}$ (= граница множества $\mathcal{D}$); через $\mathcal{D}_j$ обозначим множество $\mathcal{A}$, сдвинутое на $-1/j$ в направлении оси y, и положим $\mathcal{G}_j = \mathcal{D}_j \cap E_n$. Кроме того, положим $u_j(x, y) = u(x, y + 1/j)$, характеристическую функцию множества $\mathcal{G}_j$ обозначим χ_j, интеграл Пуассона функции $\chi_j(x)\, u_j(x, 0)$ обозначим $\varphi_j(x, y)$ и положим $\psi_j(x, y) = u_j(x, y) - \varphi_j(x, y)$. Заметим, что $|\varphi_j| \leqslant 1$ (это следует из леммы 1.17 (b) гл. I и неотрицательности ядра Пуассона).

Последовательность функций $f_j(s) = \chi_j(s)\, u_j(s, 0)$ равномерно ограничена по $L^2(E_n)$-норме (так как $\|f_j\|_2 \leqslant \|\chi_j\|_2 = \left(\int_{\mathcal{G}_j} ds\right)^{1/2} \leqslant$ (объем куба с ребром $1 + 2\alpha/j)^{1/2} \leqslant (1 + 2\alpha)^{n/2}$). Значит, существует подпоследовательность $\{f_{j_k}\}$, слабо сходящаяся к функции

[1] Во всем доказательстве будет использоваться это обозначение: точки из E_n (т. е. точки из E_{n+1} с последней координатой 0) обозначаются буквой q. Буква p используется для обозначения точек из E_{n+1}^+.

$f \in L^2(E_n)$. В частности,

$$\varphi_{jk}(x, y) = \int\limits_{E_n} f_{jk}(s) P(x - s, y)\, ds \to \int\limits_{E_n} f(s) P(x - s, y)\, ds = \varphi(x, y)$$

при $k \to \infty$ для всех $(x, y) \in E_{n+1}^+$.

Поскольку очевидно, что $\lim\limits_{j \to \infty} u_j(x, y) = u(x, y)$, то существует предел

$$\psi(x, y) = \lim_{k \to \infty} \psi_{jk}(x, y) = u(x, y) - \varphi(x, y).$$

Но φ есть интеграл Пуассона некоторой функции из $L^2(E_n)$, а значит, по теореме 3.16, он имеет некасательный предел почти во всех точках E_n. Так как $u = \varphi + \psi$, то нам, следовательно, нужно показать, что $\lim \psi(p) = 0$ при $p \to q$ внутри конуса $\Gamma_\alpha(q)$ для почти всех $q \in F$.

Для этого мы сначала заметим, что функции ψ обладают такими свойствами:

(1) $|\psi_j(p)| \leqslant 2$ при $p \in \mathscr{D}$ (так как $|\psi_j| \leqslant |u_j| + |\varphi_j| \leqslant 1 + 1 = 2$ в $\mathscr{D}$);

(2) $\psi_j(p) \to 0$ при $p \to q \in F$, $p \in \mathscr{D}$ (действительно, из теоремы 3.16 следует, что это справедливо для всех внутренних точек множества $\mathscr{G}_j$).

Мы утверждаем, что теорема будет доказана, если найдется функция w, гармоническая в E_{n+1}^+ и такая, что:

(a) $w(x, y) \geqslant 0$ в E_{n+1}^+;

(b) $w(x, y) \geqslant 2$ в $\mathscr{B} \setminus F$;

(c) w имеет некасательные пределы, равные 0, почти во всех точках F.

Если это имеет место, то $w(p) \pm \psi_j(p) \geqslant 0$ в $\mathscr{B} \setminus F$, в силу (1) и (b). Кроме того, в силу (2) и (a),

$$\lim_{p \to q \in F} \inf_{p \in \mathscr{D}} \{w(p) \pm \psi_j(p)\} \geqslant \lim_{p \to q \in F} \inf_{p \in \mathscr{D}} w(p) \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что $w(p) \pm \psi_j(p) \geqslant 0$ для всех $p \in \mathscr{D}$. Если бы это было не так, то, в силу принципа минимума, существовала бы последовательность $\{p_k\} \subset \mathscr{D}$, сходящаяся к некоторой точке из F при $k \to \infty$ и такая, что $w(p_k) \pm \psi_j(p_k) < -\varepsilon$ для каждого k, где ε — некоторое положительное число. Но, в силу (2), $\psi_j(p_k) \to 0$ при $k \to \infty$, и, таким образом, для достаточно больших k значение $w(p_k)$ было бы отрицательным, что противоречит свойству (a). Следовательно, устремляя j к ∞ (по подпоследовательности), получим, что $w(p) \pm \psi(p) \geqslant 0$ для всех $p \in \mathscr{D}$, т. е. $|\psi(p)| \leqslant w(p)$ для всех $p \in \mathscr{D}$. Следовательно, доказываемый результат, что $\lim \psi(p) = 0$, когда p стремится к q внутри $\Gamma_\alpha(q)$, для почти всех $q \in F$, следует из свойства (c).

Продолжим доказательство, построив требуемую функцию w, обладающую тремя свойствами (a), (b) и (c). Пусть ξ — характеристическая функция множества $E_n \setminus F$; введем обозначение

$$w(x, y) = 2y + cy \int\limits_{E_n} \frac{\xi(s)}{(y^2 + |x - s|^2)^{(n+1)/2}}\, ds$$

при $y > 0$, где c — положительное число (которое будет выбрано позднее). Ясно, что $w \geqslant 0$ в E_{n+1}^+. Свойство (c) есть непосредственное следствие теоремы 3.16. Таким образом, нужно только показать, что w обладает свойством (b). Заметим сначала, что если $(x,y) \in \mathscr{B} \setminus F$ и $y = 1$, то $w(x, y) \geqslant 2y = 2$. Предположим теперь, что $p = (x, y) \in \mathscr{B}$ и $0 < y < 1$. Рассмотрим перевернутый конус с вершиной в точке p и раствором α (рис. 1). Пусть G — внутренность шара, образованного пересечением этого конуса с гиперплоскостью E_n; тогда G и F не пересекаются. Если бы это было не так, то нашлась бы точка $q \in G \cap F$ и, следовательно, p лежала бы внутри $\Gamma_\alpha(q)$. Но это невозможно, поскольку $p \in \mathscr{B}$. Таким образом,

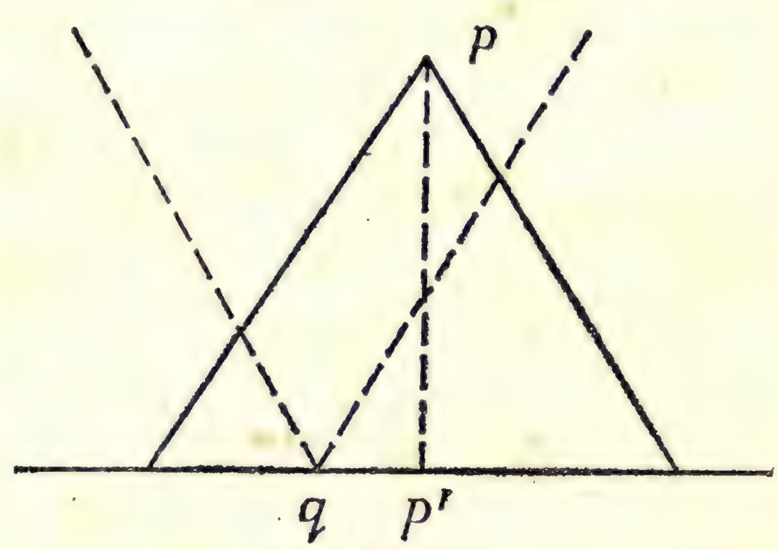

Рис. 1

$$w(p) \geqslant cy \int\limits_{G} \frac{ds}{(y^2 + |x - s|^2)^{(n+1)/2}} =$$

$$= c\omega_{n-1} y \int\limits_0^{\alpha y} \frac{r^{n-1}\,dr}{(y^2 + r^2)^{(n+1)/2}} = c\omega_{n-1} \int\limits_0^{\alpha} \frac{r^{n-1}\,dr}{(1 + r^2)^{(n+1)/2}}.$$

Выбрав постоянную c должным образом, можно добиться того, чтобы последнее выражение стало больше 2.

Итак, мы построили функцию w и тем самым показали, что $\psi(p)$ имеет предел 0, когда p стремится к q внутри $\Gamma_\alpha(q)$, для почти всех $q \in F$. Теперь мы утверждаем, что из оценки $|\psi| \leqslant w$ в $\bigcup\limits_{q \in F} \Gamma_\alpha(q)$ следует, что $|\psi(p)| \leqslant w(p)$ для почти всех $q \in F$, когда p лежит в конусе с вершиной в точке q *произвольного* раствора, если только точка p достаточно близка к q. Простые геометрические рассуждения показывают, что это действительно так в случае, когда q — *точка плотности* множества F [1]. Следовательно,

---

[1] Пусть $\xi_F = \xi$ — характеристическая функция измеримого множества $F \subset E_n$; тогда точка x есть *точка плотности* F, если $\Omega_n^{-1} r^{-n} \int\limits_{|x-t|<r} \xi(t)\, dt \to 1$ при $r \to 0$. В силу следствия 3.14, почти каждая точка из F есть точка плотности.

$\lim \psi(p) = 0$, когда p некасательно стремится к $q \in F$ для почти всех q из F. Это означает, что u и φ имеют одинаковые некасательные пределы для почти всех q из F, и тем самым теорема доказана.

Нас будет интересовать обобщение этого результата на функции, гармонические по наборам переменных (такие функции называются *кратногармоническими*). Под этим подразумеваются дважды дифференцируемые функции u, определенные в области $\mathcal{D}$ точек $(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}) = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)}, \ldots, x_1^{(k)}, \ldots \ldots, x_{n_k}^{(k)})$, принадлежащих прямому произведению $E_{n_1} \times \cdots \cdots \times E_{nk}$ евклидовых пространств, такие, что

$$\sum_{i=1}^{n_j} \frac{\partial^2 u}{(\partial x_i^{(j)})^2} = 0$$

при $1 \leqslant j \leqslant k$. Такие функции нам встретятся в следующей главе, где мы будем иметь дело с аналитическими функциями нескольких переменных. В этом случае каждое из пространств E_{n_j} будет двумерным, и его можно отождествить с комплексной плоскостью.

Нетрудно сформулировать это обобщение и указать изменения в доказательстве теоремы 3.19, необходимые для его доказательства. Одно из этих изменений затрагивает результаты, аналогичные теоремам 2.5 и 3.16 для «повторных интегралов Пуассона» (т. е. решений задачи Дирихле для случая кратногармонических функций).

Эти повторные интегралы Пуассона являются примером семейства операторов несколько более общего вида, чем возникающие в теореме 3.12. Они имеют несколько независимых параметров, стремящихся к 0, т. е. семейство $\{T_\varepsilon\}$ параметризуется множеством $\{\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \in E_m;\ \varepsilon_j > 0,\ j = 1, \ldots, m\}$ (*первый октант в* E_m), и объектом нашего изучения будет поведение этого семейства при $\varepsilon \to 0 \in E_m$. В случае повторных интегралов Пуассона будем для простоты считать, что $m = 2$. Именно, отождествим E_n с прямым произведением E_{n_1} и E_{n_2}, где $n_1 + n_2 = n$, и положим

$$P_j(t, \varepsilon_j) = c_{n_j} \frac{\varepsilon_j}{(|t|^2 + \varepsilon_j^2)^{(n_j+1)/2}}$$

для $t = (t_1, \ldots, t_{n_j}) \in E_{n_j}$, $j = 1, 2$. Тогда для $f \in L^p(E_n)$ определим $T_\varepsilon f = T_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} f$, положив

$$(T_\varepsilon f)(x) = \int_{E_{n_1}} P_1(x^{(1)} - t, \varepsilon_1) \left\{ \int_{E_{n_2}} P_2(x^{(2)} - s, \varepsilon_2) f(t, s)\, ds \right\} dt,$$

где

$$x = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)}) = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in E_{n_1} \times E_{n_2} = E_n.$$

Если $f(x)=f_1(x^{(1)})f_2(x^{(2)})$, где $f_j \in L^p(E_{n_j}) \cap C_0(E_{n_j})$, $j=1, 2$, то из теоремы 2.1 следует, что $(T_\varepsilon f)(x)$ равномерно сходится к $f(x)$, когда $\varepsilon=(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\to(0, 0)$. Класс конечных линейных комбинаций таких функций плотен в $L^p(E_n)$, $1\leqslant p<\infty$; таким образом, если показать, что справедливо неравенство (3.13), то можно заключить, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon f)(x)$ существует и конечен почти всюду. Нетрудно установить следующий более сильный результат для $1<p\leqslant\infty$ и $(Mf)(x)=\sup\limits_{\varepsilon_1, \varepsilon_2>0}|(T_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}f)(x)|$:

$$\|Mf\|_p\leqslant A\|f\|_p, \tag{3.20}$$

где A зависит от p, n_1 и n_2, но не зависит от $f\in L^p(E_n)$ (см. обсуждение перед (3.6)). Для того чтобы это проделать, определим $M^{(1)}$ как оператор, ставящий в соответствие функции $f\in L^p(E_n)$ максимальную функцию $f(\cdot, x^{(2)})$, т. е.

$$(M^{(1)}f)(x)=(M^{(1)}f)(x^{(1)}, x^{(2)})=$$
$$=\sup_{r>0}\Omega_{n_1}^{-1}r^{-n_1}\int\limits_{|t|\leqslant r}|f(x^{(1)}-t, x^{(2)})|\,dt.$$

Аналогично, положим

$$(M^{(2)}f)(x)=\sup_{r>0}\Omega_{n_2}^{-1}r^{-n_2}\int\limits_{|s|\leqslant r}|f(x^{(1)}, x^{(2)}-s)|\,ds.$$

Тогда, по теореме 3.7,

$$\begin{aligned}\|M^{(2)}M^{(1)}f\|_p&\leqslant b(p, n_2)\|M^{(1)}f\|_p\leqslant\\&\leqslant b(p, n_2)\,b(p, n_1)\|f\|_p=B\|f\|_p.\end{aligned}\tag{3.21}$$

С другой стороны, из (3.10) следует, что

$$\begin{aligned}|(T_\varepsilon f)(x)|&=|(T_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}f)(x)|\leqslant\\&\leqslant\int\limits_{E_{n_2}}P_2(x^{(2)}-s, \varepsilon_2)(M^{(1)}f)(x^{(1)}, s)\,ds\leqslant\\&\leqslant(M^{(2)}M^{(1)}f)(x^{(1)}, x^{(2)}).\end{aligned}$$

Таким образом, $(Mf)(x)=\sup\limits_{\varepsilon_1, \varepsilon_2>0}|(T_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}f)(x)|\leqslant(M^{(2)}M^{(1)}f)(x)$, и неравенство (3.20) следует из (3.21).

Отсюда можно заключить, что предел $\lim(T_\varepsilon f)(x)$ при $\varepsilon=(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\to(0, 0)$ существует и конечен для почти всех $x\in E_n$. Ясно, что, изменив приведенные выше рассуждения, можно применить их к случаю m-кратных повторных интегралов Пуассона. Точнее говоря, справедлива следующая

Теорема 3.22. *Пусть* $f \in L^p(E_n)$, $1 < p < \infty$, *и*

$$u(x, \varepsilon) = u(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) =$$
$$= \int_{E_{n_1}} \cdots \int_{E_{n_m}} P_1(x^{(1)} - t^{(1)}, \varepsilon_1) \ldots P_m(x^{(m)} - t^{(m)}, \varepsilon_m) \times$$
$$\times f(t^{(1)}, \ldots, t^{(m)})\, dt^{(1)} \ldots dt^{(m)},$$

где $t^{(j)}$ *и* $x^{(j)}$ *принадлежат* E_{n_j}, *а* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ *принадлежит первому октанту в* E_m (*т. е.* $\varepsilon_j > 0$ *при* $j = 1, \ldots, m$); *тогда*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \to 0} u(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = f(x)$$

для почти всех $x \in E_n$.

Доказательство. Мы уже видели, что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u(x, \varepsilon)$ существует и конечен почти всюду. Нужно только показать, что он равен $f(x)$ почти всюду. Как и при доказательстве следствия 3.14, достаточно убедиться в том, что $\| u(\cdot, \varepsilon) - f \|_p \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Это можно проделать почти таким же образом, как и при доказательстве теоремы 1.18 гл. I. Для упрощения обозначений опять рассмотрим случай $m = 2$; при этом метод доказательства очевидным образом обобщается на произвольный случай. С помощью леммы 1.17 (b) гл. I и замены переменных получаем

$$u(x, \varepsilon) - f(x) = \int_{E_{n_1}} \int_{E_{n_2}} P_1(t, \varepsilon_1) P_2(s, \varepsilon_2) \{f(x^{(1)} - t, x^{(2)} - s) -$$
$$- f(x^{(1)}, x^{(2)})\}\, dt ds =$$
$$= \int_{E_{n_1}} \int_{E_{n_2}} P_1(t, 1) P_2(s, 1) \{f(x^{(1)} -$$
$$- \varepsilon_1 t, x^{(2)} - \varepsilon_2 s) - f(x^{(1)}, x^{(2)})\}\, dt ds.$$

Для $(h, k) \in E_{n_1} \times E_{n_2}$ обозначим через

$$\omega_{p,f}(h, k) = \omega(h, k) =$$
$$= \left(\int_{E_{n_1}} \int_{E_{n_2}} | f(x^{(1)} + h, x^{(2)} + k) - f(x^{(1)}, x^{(2)})|^p\, dx^{(1)} dx^{(2)} \right)^{1/p}$$

L^p-модуль непрерывности функции f. Было показано, что $\omega(h, k) \to 0$ при $|h|$, $|k| \to 0$ и что $\omega(h, k) \leqslant 2\|f\|_p$. Таким образом, в силу интегрального неравенства Минковского и теоремы Лебега о

мажорируемой сходимости,

$$\left(\int_{E_n} |u(x, \varepsilon) - f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} =$$

$$= \int_{E_{n_1}} \int_{E_{n_2}} \omega(-\varepsilon_1 t, -\varepsilon_2 s) P_1(t, 1) P_2(s, 1) \, dt ds \to 0$$

при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$. Это завершает доказательство.

Некоторое изменение только что приведенных рассуждений показывает, что теорема (так же как и приводимый ниже ее некасательный вариант) справедлива и для случая $p = \infty$. Так как это все равно следует из доказываемой ниже теоремы 3.24, то мы не станем приводить здесь это изменение.

Теорема 3.22 утверждает, что повторный интеграл Пуассона функции из $L^p(E_n)$ сходится к этой функции почти всюду, если приближаться к точкам $x_0 = (x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(m)})$ в E_n «сверху» вдоль произведения прямых $x^{(j)} = x_0^{(j)}$ из $E^+_{n_j+1}$, $j = 1, \ldots, m$ (ср. с обсуждением в начале этого параграфа). Как и раньше, существуют пределы более общего вида. Это обобщения некасательных пределов, определяемые следующим образом. Положим $n_1 + \ldots + n_k = n$ и

$$\Gamma^{(j)}_{\alpha_j}(x_0^{(j)}) = \{(x^{(j)}, y_j) \in E^+_{n_j+1};\ |x^{(j)} - x_0^{(j)}| < \alpha_j y_j\}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Говорят, что функция u, определенная на $E^+_{n_1+1} \times \cdots \times E^+_{n_k+1}$, имеет *некасательный предел l по каждому набору переменных*[1] в точке $x_0 = (x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(k)})$, если $u(x^{(1)}, y_1; \ldots; x^{(k)}, y_k) = u(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}; y_1, \ldots, y_k)$ стремится к l, когда точка $(x^{(1)}, y_1; \ldots; x^{(k)}, y_k)$ стремится к x_0 внутри прямого произведения $\Gamma^{(1)}_{\alpha_1} \times \cdots \times \Gamma^{(k)}_{\alpha_k}$ для всех k-строк $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ положительных чисел (т. е. каждая из точек $(x^{(j)}, y_j)$ некасательно стремится к $x_0^{(j)}$, $1 \leqslant j \leqslant k$). С помощью рассуждений, использованных при доказательстве теоремы 3.22, и неравенства (3.17), примененного к каждому из ядер P_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, получаем такое

Следствие 3.23. *Пусть $f \in L^p(E_n)$, $1 < p < \infty$, и $u(x, \varepsilon)$ — определенная в теореме 3.22 функция; тогда $u(x, \varepsilon)$ имеет*

[1] Переменные $x_1, \ldots, x_n$ группируются в k попарно не пересекающихся наборов; j-й набор состоит из переменных $x_{N_{j-1}+1}, \ldots, x_{N_j}$, где $N_l = n_1 + \ldots + n_l$ для $1 \leqslant l \leqslant k$. Вводимое понятие связано с подобной группировкой, и, собственно говоря, следовало бы сослаться на это в определении. С другой стороны, во всех применениях будет ясно, какие наборы имеются в виду, так что ради простоты мы этого не сделали.

некасательный предел $f(x_0)$ по каждому набору переменных почти во всех точках $x_0 \in E_n$.

Будем говорить, что функция u, определенная на $E^+_{n_1+1} \times \cdots \times E^+_{n_k+1}$, *некасательно ограничена по каждому набору переменных* в точке $x_0 \in E_n$, если u ограничена в прямом произведении усеченных конусов $\Gamma_{\alpha_j}(x_0^{(j)}) \cap \{(x^{(j)}, y_j) \in E^+_{n_j+1};\ 0 < y_j \leqslant 1\}$, $1 \leqslant j \leqslant k$, для всех k-строк $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ положительных чисел. Пусть u — повторный интеграл Пуассона функции $f \in L^p(E_n)$, $1 < p < \infty$. Утверждение, что u некасательно ограничена по каждому набору переменных почти во всех точках E_n, является несколько более слабым, чем следствие 3.23 (и, конечно, непосредственно вытекает из этого следствия).

В полной аналогии со случаем гармонических в E^+_{n+1} функций эта некасательная ограниченность эквивалентна существованию некасательных пределов почти всюду по каждому набору переменных даже для гармонических функций, не являющихся интегралами Пуассона. Точнее говоря, справедливо следующее обобщение теоремы 3.19:

Теорема 3.24. *Пусть $n_1 + \cdots + n_k = n$ и u — функция, определенная на прямом произведении $E^+_{n_1+1} \times \cdots \times E^+_{n_k+1}$ и гармоническая по каждому набору переменных $(x^{(j)}, y_j) = (x_1^{(j)}, \ldots, x_{n_j}^{(j)}, y_j)$ в $E^+_{n_j+1}$, $1 \leqslant j \leqslant k$ (т. е. u дважды дифференцируема и удовлетворяет уравнениям*

$$\Delta_j u = \sum_{i=1}^{n_j} \frac{\partial^2 u}{(\partial x_i^{(j)})^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} = 0).$$

Если u некасательно ограничена по каждому набору переменных во всех точках множества $S \subset E_n$ положительной меры, то u имеет некасательные пределы по каждому набору переменных почти во всех точках S.

Доказательство. Основные идеи доказательства этой теоремы были развиты при доказательстве теоремы 3.19, так что мы укажем только необходимые изменения. Ограничимся случаем $k = 2$ и $n_1 = n_2 = n$ (рассуждения легко обобщаются на произвольный случай).

По аналогии с обозначениями, использованными при доказательстве теоремы 3.19, будем обозначать через $p = (p_1, p_2) = (x^{(1)}, y_1;\ x^{(2)}, y_2)$ произвольную точку множества $E^+_{n+1} \times E^+_{n+1}$, а через $q = (q_1, q_2) = (x^{(1)}, 0;\ x^{(2)}, 0)$ произвольную точку множества $E_n \times E_n = E_{2n}$ (последнее представляет собой *отмеченную гра-*

ницу множества $E_{n+1}^{+} \times E_{n+1}^{+}$)[1]. Рассуждая так же, как выше, легко свести задачу к доказательству того, что если $|u| \leqslant 1$ в области

$$\mathcal{A} = \{ \bigcup_{(q_1, q_2) \in F} \gamma_\alpha(q_1, q_2)\} \cap \{p = (x^{(1)}, y_1;\ x^{(2)}, y_2);\ 0 < y_1, y_2 < 2\},$$

то $u(p)$ стремится к некоторому пределу, когда p стремится к $q = (q_1, q_2)$ внутри $\gamma_\alpha(q) = \gamma_\alpha(q_1, q_2)$, для почти всех точек $q \in F \subset$ $\subset E_{2n}$. Здесь $\gamma_\alpha(q_1, q_2)$ обозначает конус $\Gamma_{\alpha_1}(q_1) \times \Gamma_{\alpha_2}(q_2)$. Выбирая подходящие подмножества, можно считать, что F замкнуто и, кроме того, содержится внутри единичного шара в E_{2n}.

Положим

$$\mathcal{D} = \{ \bigcup_{q \in F} \gamma_\alpha(q)\} \cap \{p = (x^{(1)}, y_1;\ x^{(2)}, y_2);\ 0 < y_1, y_2 < 1\},$$

и пусть $\mathcal{A}_j$ обозначает это же множество, сдвинутое на $-1/j$ в направлении осей y_1 и y_2, и $\mathcal{G}_j = \mathcal{A}_j \cap E_{2n}$. Далее, положим $u_j(p) = u(x^{(1)}, y_1 + 1/j;\ x^{(2)}, y_2 + 1/j)$, характеристическую функцию множества $\mathcal{G}_j$ обозначим χ_j, повторный интеграл Пуассона функции $\chi_j(x^{(1)}; x^{(2)})\, u_j(x^{(1)}, 0; x^{(2)}, 0)$ обозначим φ_j и положим $\psi_j =$ $= u_j - \varphi_j$.

Как и при доказательстве теоремы 3.19, можно найти последовательность $\{\varphi_{j_k}\}$, сходящуюся к повторному интегралу Пуассона некоторой функции из $L^2(E_{2n})$ в каждой точке множества $E_{n+1}^{+} \times E_{n+1}^{+}$. Обозначим этот предел φ. Так как $u_j \to u$ при $j \to$ $\to \infty$, то $\psi_{j_k}(p) = u_{j_k}(p) - \varphi_{j_k}(p)$ стремится к пределу $\psi(p) =$ $= u(p) - \varphi(p)$ для всех $p \in E_{n+1}^{+} \times E_{n+1}^{+}$. Но φ — интеграл Пуассона некоторой функции из $L^2(E_{2n})$, поэтому, в силу следствия 3.23, φ имеет некасательные пределы по каждому набору переменных почти во всех точках E_{2n}. Покажем, что $\lim \psi(p) = 0$, когда p стремится к q внутри $\gamma_\alpha(q)$, для почти всех $q \in F$.

Так же как при доказательстве теоремы 3.19, основным моментом является построение кратногармонической функции w в $E_{n+1}^{+} \times E_{n+1}^{+}$, обладающей следующими свойствами:

(a) $w \geqslant 0$ в $E_{n+1}^{+} \times E_{n+1}^{+}$;

(b) $\lim\limits_{p' \to p}\ \inf\limits_{p' \in \mathcal{D}} w(p') \geqslant |\psi_j(p)|, \quad j = 1, 2, \ldots,$

для всех точек p на границе множества $\mathcal{D}$;

(c) w имеет нулевой некасательный предел по каждому набору переменных почти во всех точках множества F.

---

[1] Термин «отмеченная граница» часто используется в литературе; он указывает на то, что рассматривается только часть топологической границы множества $E_{n+1}^{+} \times E_{n+1}^{+}$.

Пусть ξ — характеристическая функция части множества $E_{2n} \setminus F$, содержащейся в фиксированном шаре достаточно большого радиуса с центром в начале координат (нижняя грань этого радиуса выявится по ходу доказательства). Положим $w = 2(y_1 + y_2) + c\,W(x^{(1)}, y_1; x^{(2)}, y_2)$, где W — повторный интеграл Пуассона функции ξ и c — положительная постоянная, которая будет определена позднее.

Свойство (a) очевидно, свойство (c) вытекает из следствия 3.23, так как ξ принадлежит всем пространствам $L^p(E_{2n})$, $1 < p < \infty$. Таким образом, нужно только доказать свойство (b). Но $\psi_j(p) = 0$ при $p \in F$, так что неравенство (b) справедливо при $p \in F$. Рассмотрим отдельно следующие оставшиеся части границы множества $\mathcal{D}$:

(i) точки, где либо y_1, либо y_2 равно 1;

(ii) точки, где $0 < y_1 < 1$ и $0 < y_2 < 1$;

(iii) точки, где $y_1 > 0$, а $y_2 = 0$ или $y_2 > 0$, а $y_1 = 0$.

Поскольку $|\psi_j| \leqslant 2$, то свойство (b), очевидно, выполняется в случае (i).

Пусть $p = (p_1, p_2) = (x^{(1)}, y_1; x^{(2)}, y_2)$ лежит в части (ii) границы $\mathcal{D}$. Рассмотрим прямое произведение перевернутых конусов с вершинами в точках p_1 и p_2 и растворами α_1 и α_2. Пересечения этих конусов с гиперплоскостями $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$ (в каждом E^+_{n+1}) образуют два открытых шара G_1 и G_2. Мы утверждаем, что $G_1 \times G_2$ не содержит точек множества F (если бы это было не так, то p принадлежала бы $\mathcal{D}$). Таким образом, функция ξ будет равна 1 на $G_1 \times G_2$, если мы выберем использованный при определении ξ шар, содержащий F, достаточно большим. Шары G_1 и G_2 имеют центры в точках $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ и радиусы $\alpha_1 y_1$ и $\alpha_2 y_2$ соответственно. Следовательно,

$$w(p) \geqslant cW(p) \geqslant c \prod_{j=1}^{2} \left(c_n y_j \int\limits_{G_j} \frac{ds^{(j)}}{(y_j^2 + |x^{(j)} - s^{(j)}|^2)^{(n+1)/2}} \right) =$$

$$= c \prod_{j=1}^{2} \left(y_j c_n \omega_n \int\limits_{0}^{\alpha_j y_j} \frac{r^{n-1}\,dr}{(y_j^2 + r^2)^{(n+1)/2}} \right) \geqslant 2,$$

если постоянную c выбрать достаточно большой.

Пусть теперь $p = (p_1, p_2) = (x^{(1)}, y_1; x^{(2)}, 0)$ лежит в части (iii) границы $\mathcal{D}$ (случай $y_1 = 0$, $y_2 > 0$ рассматривается аналогично). В этом случае $w(p)$ не определена и нужно оценить $\liminf w(p')$, когда $p' \in \mathcal{D}$ стремится к p. Полагая $p' = (p_1', p_2')$ и обозначая

через y_1' и y_2' y-координаты точек p_1' и p_2', получим

$$w(p') \geqslant 2y_1' + cc_n^2 \int\limits_{E_n} \frac{y_1'}{|p_1' - q_1|^{(n+1)/2}} \left\{ \int\limits_{E_n} \frac{y_2'}{|p_2' - q_2|^{(n+1)/2}} \xi(q_1, q_2)\, dq_2 \right\} dq_1.$$

Из леммы Фату следует, что

$$\lim_{p' \to p} \inf_{p' \in \mathscr{D}} w(p') \geqslant$$

$$\geqslant 2y_1 + cc_n^2 \int\limits_{E_n} \frac{y_1}{|p_1 - q_1|^{(n+1)/2}} \times$$

$$\times \left\{ \liminf_{p_2' \to p_2} c_n \int\limits_{E_n} \frac{y_2'}{|p_2' - q_2|^{(n+1)/2}} \xi(q_1, q_2)\, dq_2 \right\} dq_1.$$

Мы утверждаем теперь, что

$$\liminf_{p_2' \to p_2} c_n \int\limits_{E_n} \frac{y_2'}{|p_2' - q_2|^{(n+1)/2}} \xi(q_1, q_2)\, dq_2 \geqslant \xi(q_1, p_2). \tag{3.25}$$

Чтобы убедиться в этом, заметим сначала, что это неравенство заведомо выполняется, когда $\xi(q_1, p_2) = 0$, так как подинтегральное выражение слева неотрицательно. Единственное другое значение функции ξ равно 1 и принимается на открытом множестве — пересечении $E_{2n} \setminus F$ с открытым шаром из E_{2n}, так что ξ непрерывна на этом множестве. Отсюда следует, что интеграл (3.25) в действительности сходится к $\xi(q, p_2)$ (это можно показать теми же самыми рассуждениями, которые были использованы для доказательства последней части свойства (b) в теореме 2.1). Таким образом, неравенство (3.25) доказано и, следовательно,

$$\lim_{p' \to p} \inf_{p' \in \mathscr{D}} w(p') \geqslant 2y_1 + cc_n \int\limits_{E_n} \frac{y_1}{|p_1 - q_1|^{(n+1)/2}} \xi(q_1, p_2)\, dq_1.$$

Остальная часть доказательства — в основном повторение рассуждений, использованных в последней части доказательства теоремы 3.19, в применении к функции $\psi_j(\bar{p}_1, p_2)$ и

$$v(\bar{p}_1) = 2y_1 + cc_n \int\limits_{E_n} \frac{y_1}{|\bar{p}_1 - q_1|^{(n+1)/2}} \xi(q_1, p_2)\, dq_1$$

в области $\mathscr{D}_{p_2}$, состоящей из точек $\bar{p}_1 \in E_{n+1}^+$, содержащихся в некотором усеченном конусе $\Gamma_{\alpha_1}(q_1)$ с $(q_1, p_2) \in F$ (на этой стадии p_2 — фиксированная точка, лежащая на границе E_n множества

E^{+}_{n+1}). Это завершает доказательство свойства (b) и одновременно доказывает оценку

$$(3.26)\qquad |\psi(p)| \leqslant w(p), \qquad p \in \mathcal{D}.$$

Для завершения доказательства теоремы следует обобщить (3.26) так, чтобы для почти всех $q \in F$ выполнялась оценка $|\psi(p)| \leqslant w(p)$, где p лежит в конусе $\Gamma_{\beta_1}(q_1) \times \Gamma_{\beta_2}(q_2)$ с произвольными растворами β_1 и β_2 достаточно близко к точке $q = (q_1, q_2)$. Это несомненно будет так для всех *точек сильной плотности* множества F. Так называются точки, которые удовлетворяют следующей лемме:

Лемма 3.27. *Пусть ξ — характеристическая функция произвольного измеримого множества F из $E_{2n} = E_n \times E_n$. Тогда для почти всех $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in F$*

$$\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \Omega_n^{-2} h_1^{-n} h_2^{-n} \int\limits_{|s^{(1)}|<h_1} \int\limits_{|s^{(2)}|<h_2} \xi(x^{(1)} - s^{(1)}, x^{(2)} - s^{(2)})\, ds^{(1)} ds^{(2)} = 1.$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in L^p(E_n \times E_n)$ определим *сильную максимальную функцию* μ_f равенством

$$\mu_f(x^{(1)}, x^{(2)}) = \sup_{h_1>0, h_2>0} \Omega_n^{-2} h_1^{-n} h_2^{-n} \int\limits_{|s^{(1)}|<h_1} \int\limits_{|s^{(2)}|<h_2} |f(x^{(1)} - s^{(1)}, x^{(2)} - s^{(2)})|\, ds^{(1)} ds^{(2)}.$$

Тогда, как и при доказательстве (3.20), $\mu_f(x) \leqslant (M^{(2)} M^{(1)} f)(x)$, так что

$$(3.28)\qquad \|\mu_f(x)\|_p \leqslant A_p \|f\|_p, \qquad 1 < p < \infty.$$

С помощью тех же рассуждений, что и в доказательстве теоремы 3.22, доказывается, что

$$(3.29)\qquad \lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \Omega_n^{-2} h_1^{-n} h_2^{-n} \int\limits_{|s^{(1)}|<h_1} \int\limits_{|s^{(2)}|<h_2} f(x^{(1)} - s^{(1)}, x^{(2)} - s^{(2)})\, ds^{(1)} ds^{(2)} = f(x^{(1)}, x^{(2)})$$

для почти всех точек $(x^{(1)}, x^{(2)}) \in E_{2n}$ и для любой фиксированной функции $f \in L^p(E_{2n})$, $1 < p < \infty$. Справедливость формулы (3.29) зависит, однако, только от значений f в окрестности точки $(x^{(1)}, x^{(2)})$, и поэтому (3.29) выполняется почти всюду, когда f принадлежит $L^p(E_{2n})$, $1 < p < \infty$, хотя бы локально. Следовательно, оно справедливо для ограниченных функций и, в частности, для функции ξ. Это доказывает лемму 3.27.

Теперь можно завершить доказательство теоремы 3.24. Пусть (q_1, q_2) — точка сильной плотности F. Для фиксированных $y_1, y_2 > 0$ рассмотрим множество

$$A = \{(x^{(1)}, x^{(2)});\ |x^{(1)} - q_1| < \beta_1 y_1,\ |x^{(2)} - q_2| < \beta_2 y_2\}.$$

Для произвольной точки $(x^{(1)}, x^{(2)}) \in A$ рассмотрим также множество

$$B = \{(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)});\ |x^{(1)} - \bar{x}^{(1)}| < \alpha_1 y_1,\ |(x^{(2)} - \bar{x}^{(2)}| < \alpha_2 y_2\}.$$

Если y_1 и y_2 достаточно малы, то B должно пересекаться с F, иначе можно было бы получить противоречие тому, что $q = (q_1, q_2)$ — точка сильной плотности F. Таким образом, если $p = (p_1, p_2)$, $p_1 = (x^{(1)}, y_1)$, $p_2 = (x^{(2)}, y_2)$ и p достаточно близка к q, то из $p \in \Gamma_{\beta_1}(q_1) \times \Gamma_{\beta_2}(q_2)$ следует, что $p \in \Gamma_{\alpha_1}(\bar{x}^{(1)}) \times \Gamma_{\alpha_2}(\bar{x}^{(2)})$, где $(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) \in F$.

Итак, оценка (3.26) выполняется также для всех $p \in \Gamma_{\beta_1}(q_1) \times \Gamma_{\beta_2}(q_2)$, достаточно близких к $q = (q_1, q_2)$, и существование некасательного предела $\lim \psi$, таким образом, установлено.

4. Субгармонические функции и мажорирование гармоническими функциями

В последующих главах нам придется мажорировать подходящими гармоническими функциями функции, имеющие вид $|F|^p$, где F — либо голоморфная функция нескольких комплексных переменных (см. гл. III), либо векторная функция с гармоническими компонентами (см. гл. VI). Оказывается, эти функции $|F|^p$ являются субгармоническими. Природу этих функций и такого типа мажорирования можно выяснить, рассмотрев тривиальный случай функций одной вещественной переменной. В этом случае гармонические функции линейны, а субгармонические, как мы увидим, выпуклы. Последние определяются как непрерывные[1] функции φ, заданные на некотором интервале и удовлетворяющие неравенству

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2} \tag{4.1}$$

для любого интервала $[x, y]$, лежащего в области определения φ. Легко показать, что это условие эквивалентно следующему: если интервал $[x, y]$ содержится в области определения функции φ, то линейная (гармоническая) функция, принимающая те же значения,

---

[1] Можно показать, что в этом одномерном случае достаточно потребовать только измеримость. Общую теорию субгармонических функций можно построить для полунепрерывных сверху функций, однако, несмотря на важность такой теории для некоторых приложений, нам понадобятся только непрерывные функции, поэтому мы ограничимся этим несколько (технически) более простым случаем.

что и φ, в концах интервала x и y, мажорирует [1] φ на этом интервале. В случае когда φ имеет непрерывную вторую производную во всех точках области определения D, неравенство (4.1) эквивалентно условию $\varphi''(x) \geqslant 0$ для всех $x \in D$.

В первой части этого параграфа мы обобщаем эти факты, имея дело с функциями, определенными на ограниченных областях; во второй части (а также в последующих главах) эти вопросы рассматриваются на некоторых неограниченных областях, естественно возникающих в наших исследованиях.

Функцию s, определенную и непрерывную в области $\mathcal{D} \subset E_n$, называют *субгармонической*, если

$$s(x_0) \leqslant \mathcal{M}_{x_0,s}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} s(x_0 + rt')\,dt' \tag{4.2}$$

для любого шара $\{x \in E_n;\ |x - x_0| \leqslant r\}$, содержащегося в $\mathcal{D}$. Это неравенство, очевидно, является обобщением (4.1).

Тот факт что из неотрицательности второй производной следует выпуклость, имеет следующее обобщение на n измерений:

Теорема 4.3. *Пусть s имеет непрерывные вторые частные производные в области $\mathcal{D}$ и $(\Delta s)(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathcal{D}$; тогда s удовлетворяет неравенству среднего значения* (4.2) *во всех точках $\mathcal{D}$.*

Доказательство. Пусть замкнутый шар радиуса r_0 с центром в точке x_0 лежит в области $\mathcal{D}$, и пусть Σ_ε, Σ_r, $0 < \varepsilon < r \leqslant r_0$, обозначают сферы радиусов ε и r с центрами в точке x_0. Применяя формулу Грина к функциям s и

$$v(x) = \begin{cases} |x - x_0|^{-(n-2)} - r^{-(n-2)} & \text{при } n > 2, \\ -\log|x - x_0| + \log r & \text{при } n = 2 \end{cases}$$

в области S, заключенной между Σ_ε и Σ_r, получим (так как $\Delta v = 0$ и $\Delta s \geqslant 0$ в S)

$$0 \geqslant \int\limits_S \int (s\Delta v - v\Delta s)\,dx = \int\limits_{\partial S} \left(s\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial s}{\partial n}\right) d\sigma,$$

где ∂S — граница области S, $\partial/\partial n$ — дифференцирование в направлении внешней нормали к ∂S и $d\sigma$ — элемент площади ∂S. Таким образом, как и в доказательстве теоремы 1.1,

$$0 \geqslant \left(\int\limits_{\Sigma_r} + \int\limits_{\Sigma_\varepsilon}\right) \frac{\partial v}{\partial n}\,s\,d\sigma - \left(\int\limits_{\Sigma_r} + \int\limits_{\Sigma_\varepsilon}\right) v\,\frac{\partial s}{\partial n}\,d\sigma.$$

---

[1] Говорят, что функция f *мажорирует* функцию g в области D, если обе функции определены в D, принимают вещественные значения и $f(x) \geqslant g(x)$ для всех $x \in D$.

Но $v=0$ на Σ_r и $\int\limits_{\Sigma_\varepsilon}(\partial s/\partial n)\,v d\sigma \leqslant 0$. (Здесь $\partial/\partial n$ обозначает дифференцирование в направлении нормали к Σ_ε, направленной к центру этой сферы. Таким образом, применяя формулу Грина к функциям s и 1 в замкнутой области $\{x;\ |x-x_0|\leqslant\varepsilon\}$, получим, что $\int\limits_{\Sigma_\varepsilon}\frac{\partial s}{\partial n}\,d\sigma\leqslant 0$; кроме того, $v\geqslant 0$ на Σ_ε при $\varepsilon\leqslant r$.) Отсюда при $n>2$

$$0\geqslant\left(\int\limits_{\Sigma_r}-\int\limits_{\Sigma_\varepsilon}\right)(-(n-2)\,|x-x_0|^{-(n-1)}\,s(x))\,d\sigma(x),$$

а при $n=2$

$$0\geqslant\left(\int\limits_{\Sigma_r}-\int\limits_{\Sigma_\varepsilon}\right)(-|x-x_0|^{-1}\,s(x))\,d\sigma(x).$$

В обоих случаях

$$\frac{1}{\omega_{n-1}\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{\Sigma_\varepsilon}s(x)\,d\sigma(x)\leqslant\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{\Sigma_r}s(x)\,d\sigma(x)=\mathcal{M}_{x_0,s}(r).$$

Пусть $\varepsilon\to 0$; тогда левая часть стремится к $s(x_0)$, и неравенство (4.2) доказано.

В последующих главах нужно будет доказывать субгармоничность некоторых функций. В общем случае они не будут дважды дифференцируемы, так что теорему 4.3 нельзя будет применять для доказательства субгармоничности. С соответствующей интерпретацией утверждения $\Delta s\geqslant 0$ в смысле обобщенных функций теорема 4.3 остается справедливой для всех непрерывных функций s. Дальнейшие детали можно найти в п. 5.8 ниже. Для наших целей, однако, более полезным будет следующий вариант только что доказанной теоремы:

Теорема 4.4. *Пусть функция $s\geqslant 0$ непрерывна в области $\mathcal{D}$, имеет непрерывные вторые частные производные на множестве $\mathcal{R}=\{x\in\mathcal{D};\ s(x)>0\}$ и $\Delta s\geqslant 0$ в $\mathcal{R}$. Тогда s — субгармоническая в $\mathcal{D}$ функция.*

Доказательство. Нужно показать, что s удовлетворяет неравенству среднего значения (4.2). Фиксируем $x_0\in\mathcal{D}$ и предположим, что замкнутый шар $S_r=\{x;\ |x-x_0|\leqslant r\}$ содержится в $\mathcal{D}$. Пусть u — решение задачи Дирихле для замкнутой области S_r, имеющее граничные значения $s(x)$ для $x\in\partial S_r=\{t;\ |t-x_0|=r\}$ (см. следствие 1.11). Если мы покажем, что $s(x)\leqslant u(x)$ для $x\in S_r$, то неравенство (4.2) будет следствием теоремы о

среднем значении (теоремы 1.1):

$$s(x_0) \leqslant u(x_0) = \mathcal{M}_{x_0, u}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_\Sigma u(x_0 + rt')\, dt' =$$

$$= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_\Sigma s(x_0 + rt')\, dt'.$$

Предположим противное: пусть $\sup\limits_{x \in S_r} \{s(x) - u(x)\} = c > 0$; введем обозначения $F = \{x \in S_r;\ s(x) - u(x) = c\}$. Тогда множество F, очевидно, замкнуто и содержится внутри S_r. С другой стороны, $s(x) > 0$ во всех точках F (так как $u(x) \geqslant 0$). Следовательно, можно применить теорему 4.3 к функции $s - u$ на множестве $\mathcal{R}$; тогда для всех $x \in F\ (\subset \mathcal{R})$ получим

$$c = s(x) - u(x) \leqslant \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_\Sigma \{s(x + \rho t') - u(x + \rho t')\}\, dt'$$

для всех достаточно малых $\rho > 0$. Поскольку $s - u \leqslant c$ в S_r и x лежит внутри S_r, из непрерывности $s - u$ следует, что $s(x + \rho t') - u(x + \rho t') = c$ для всех $t' \in \Sigma$ и достаточно малых ρ. Отсюда следует, что множество F открыто. Так как S_r связно, то F должно быть либо пустым, либо совпадать со всем S_r. Но, как мы уже отметили, граница шара S_r отделена от F и, следовательно, F пусто. Отсюда вытекает, что $s(x) \leqslant u(x)$ во всех точках x из S_r, и теорема доказана.

Полезно отметить, что фактически мы доказали следующий более общий результат:

Теорема 4.4′. *Пусть функция $s \geqslant 0$ непрерывна в области $\mathcal{D}$ и субгармонична на множестве $\mathcal{R} = \{x \in \mathcal{D};\ s(x) > 0\}$; тогда s субгармонична в $\mathcal{D}$.*

Рассуждения, приведенные в конце предыдущего доказательства, обычно применяются к субгармоническим функциям, определенным на произвольной ограниченной области. Более точно, имеет место следующая теорема (оправдывающая использование слова «субгармоническая»):

Теорема 4.5. *Пусть s — функция, непрерывная на $\overline{\mathcal{D}}$ — замыкании ограниченной области $\mathcal{D}$ и субгармоническая в $\mathcal{D}$, а u — функция, непрерывная на $\overline{\mathcal{D}}$ и гармоническая в $\mathcal{D}$; пусть, кроме того, $s(x) \leqslant u(x)$ для всех $x \in \partial\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$. Тогда $s(x) \leqslant u(x)$ для всех $x \in \overline{\mathcal{D}}$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $s - u$. Пусть $s(x) - u(x) > 0$ для некоторого $x \in \mathcal{D}$; положим $c = \sup\limits_{x \in \mathcal{D}} \{s(x) -$

$-u(x)\} > 0$ и $F = \{x \in \overline{\mathcal{D}};\ s(x) - u(x) = c\}$ ($c < \infty$, так как $\overline{\mathcal{D}}$ — компакт). Тогда F, очевидно, замкнуто. С другой стороны, $-u$, будучи гармонической функцией, обладает свойством среднего значения; следовательно,

$$c = s(x) - u(x) \leqslant \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\Sigma} \{s(x + \rho t') - u(x + \rho t')\}\, dt'$$

для всех $x \in F$ и достаточно малых ρ. Как и в предыдущем доказательстве, отсюда следует, что F открыто. Таким образом, F пусто (ибо $\overline{\mathcal{D}}$ связно и $s(x) - u(x) \leqslant 0 < c$, когда $x \in \overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$) и, следовательно, $s(x) - u(x) \leqslant 0$ для всех $x \in \overline{\mathcal{D}}$.

Прежде чем двинуться дальше в нашем кратком изучении субгармонических функций, полезно привести несколько примеров.

(1) Ясно, что всякая гармоническая функция является субгармонической. Более того, из определения немедленно следует, что $|u|$ — субгармоническая функция для любой гармонической функции u.

(2) Если s — субгармоническая функция, а φ — неубывающая выпуклая функция, определенная на интервале, содержащем область значений функции s, то сложная функция $\varphi \circ s$ субгармонична. Это следует из неравенства Иенсена [1], примененного к правой части неравенства (4.2):

$$\varphi(s(x_0)) \leqslant \varphi\left(\int_{\Sigma} s(x_0 + rt')\, dt'/\omega_{n-1}\right) \leqslant \int_{\Sigma} \varphi(s(x_0 + rt'))\, dt'/\omega_{n-1}.$$

Поскольку $\varphi(x) = x^p$ — выпуклая функция при $x \geqslant 0$, $p \geqslant 1$, из этого замечания и первого примера следует, что $|u|^p$ — субгармоническая функция, если субгармонична функция u.

(3) В общем случае при $p < 1$ неверно, что $|u|^p$ — субгармоническая функция, если u — гармоническая функция. Например, для гармонической функции $u = u(x, y) = x$, $(x, y) \in E_2$, не существует такого $p < 1$, чтобы $|u|$ была субгармонической. Для

---

[1] Одна из нескольких форм неравенства Иенсена следующая. Пусть μ — конечная мера на пространстве M, f — некоторая μ-интегрируемая функция и φ — выпуклая функция, область определения которой содержит область значений функции f; тогда

$$(*) \qquad \varphi\left(\int_M f(t)\, d\mu(t)/\mu(M)\right) \leqslant \int_M \varphi(f(t))\, d\mu(t)/\mu(M).$$

Если M — интервал $[x, y]$, $\mu(\{x\}) = 1 = \mu(\{y\})$, $\mu(E) = 0$ для любого борелевского множества E, не содержащего ни x, ни y, а f — тождественная функция $f(t) = t$ для $x \leqslant t \leqslant y$, то это неравенство переходит в неравенство (4.1), определяющее выпуклые функции. Нетрудно, однако, простыми предельными рассуждениями получить неравенство (*) из неравенства (4.1).

двух измерений, однако, справедлив значительно более сильный результат, чем приведенный в конце предыдущего примера, если рассматривать гармоническую функцию вместе с ее *гармонически сопряженной*[1]. Точнее, если $F = u + iv$ — аналитическая функция, то $|F|^p$ субгармонична для всех $p > 0$. Это можно показать следующим образом. Пусть $\mathcal{R}$ — множество точек $x + iy = z$ из области определения функции F, таких, что $F(z) \neq 0$; тогда $s = \log |F|$ — гармоническая в $\mathcal{R}$ и, следовательно, субгармоническая функция. Так как $\varphi(x) = e^{px}$ — выпуклая неубывающая функция при $p > 0$, то сложная функция $\varphi \circ s = |F|^p$ субгармонична в $\mathcal{R}$. То, что $|F|^p$ субгармонична в области определения F, теперь следует из теоремы 4.4′.

(4) Пусть $s_1, \ldots, s_k$ — субгармонические функции в области $\mathcal{D}$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — неотрицательные вещественные числа; тогда линейная комбинация $\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_k s_k$ — субгармоническая в $\mathcal{D}$ функция. Аналогично, $s(x) = \max\limits_{x \in \mathcal{D}} \{s_1(x), s_2(x)\}$ — субгармоническая в области $\mathcal{D}$ функция, если s_1 и s_2 субгармоничны в этой области.

Если гармоническая функция u мажорирует в некоторой области функцию s, то говорят, что u — *гармоническая мажоранта* функции s. Если $u \leqslant h$, где h — любая другая гармоническая мажоранта функции s, то говорят, что u — *наименьшая гармоническая мажоранта* функции s. Из теоремы 4.5 следует, что если s — непрерывная на замыкании $\overline{\mathcal{D}}$ ограниченной области $\mathcal{D}$ и субгармоническая в $\mathcal{D}$ функция, то функция u будет гармонической мажорантой s, при условии что она имеет непрерывное продолжение на $\overline{\mathcal{D}}$, мажорирующее s на $\partial\mathcal{D}$. Если для $\mathcal{D}$ существует решение задачи Дирихле, то отсюда немедленно следует, что наименьшая гармоническая мажоранта функции s есть непрерывная на $\overline{\mathcal{D}}$ и гармоническая в $\mathcal{D}$ функция, совпадающая с s на $\partial\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$. Мы закончим этот параграф, доказав соответствующий результат для некоторого класса субгармонических функций, определенных на верхних полупространствах. Этот результат будет использоваться (см. гл. III и VI) вместе с теоремой 3.19 или теоремой 3.24 для доказательства существования граничных значений для некоторых классов гармонических функций.

---

[1] Если u гармонична в области $\mathcal{R} \subset E_2$, то гармоническая функция v, такая, что функция $F = u + iv$ аналитична в области $\mathcal{R}$, называется гармонически сопряженной к u. Элементарно доказывается, что если $\mathcal{R}$ — односвязная область, то гармонически сопряженная функция существует и единственна с точностью до произвольной аддитивной постоянной. В частности, гармонически сопряженная к u существует в окрестности каждой точки области $\mathcal{R}$, где функция u гармоническая.

Теорема 4.6. *Пусть s — неотрицательная субгармоническая функция, определенная в E_{n+1}^+ и такая, что*

$$\int_{E_n} [s(x, y)]^q \, dx \leqslant c^q < \infty \tag{4.7}$$

для всех $y > 0$, где $1 \leqslant q < \infty$ и c не зависит от $y > 0$. Тогда s имеет в E_{n+1}^+ наименьшую гармоническую мажоранту. Более того, в случае $q > 1$ эта мажоранта есть интеграл Пуассона некоторой функции $f \in L^q(E_n)$, причем $\| f \|_q \leqslant c$; если $q = 1$, то s является интегралом Пуассона — Стилтьеса конечной борелевской меры на E_n с полной мерой, не превышающей c.

Доказательство. Заметим сначала, что s удовлетворяет всем предположениям леммы 2.6, за исключением гармоничности. Доказательство леммы 2.6 опирается, однако, только на неравенство (4.2) и не использует полностью свойство среднего значения гармонических функций. Следовательно, существует постоянная $A = A_{n,p} > 0$, такая, что

$$\| s(\cdot, y) \|_\infty = \sup_{x \in E_n} | s(x, y) | \leqslant A c y^{-n/q}. \tag{4.8}$$

Покажем, что для каждого собственного подполупространства $E_{n+1,y_0}^+ = \{(x, y) \in E_{n+1};\ y \geqslant y_0 > 0\}$ функция s принадлежит классу $C_0(E_{n+1,y_0}^+)$, т. е.

$$\lim_{|x|^2 + y^2 \to \infty} s(x, y) = 0, \tag{4.9}$$

когда $y \geqslant y_0$. Заметим сначала, что, как видно из (4.8), $s(x, y)$ мала, когда y велико. Таким образом, достаточно показать, что $s(x, y) \to 0$ при $|x| \to \infty$, когда y лежит между y_0 и некоторым фиксированным $y_1 > y_0$. Фиксируем положительное число $r < y_0$ и положим $B = \{(x, y) \in E_{n+1};\ y_0 - r < y < y_1 + r\} \subset E_{n+1}^+$. Тогда

$$\int_B [s(x, y)]^q \, dx dy = \int_{y_0 - r}^{y_1 + r} \int_{E_n} [s(x, y)]^q \, dx dy \leqslant (y_1 + 2r - y_0) c^q < \infty.$$

Следовательно, если $B_k = B \cap \{(x, y) \in E_{n+1};\ |x| \geqslant k\}$, то

$$\lim_{k \to \infty} \int_{B_k} [s(x, y)]^q \, dx dy = 0. \tag{4.10}$$

Если $|x| \geqslant m$ и $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$, то найдется шар S радиуса r с центром в точке (x, y), содержащийся в множестве B_{m-r}. Так как $\varphi(t) = t^q$ — неубывающая выпуклая функция, то $\varphi \circ s = s^q$

субгармонична (см. пример (2) выше) и, следовательно,

$$[s(x, y)]^q \leqslant \frac{1}{|S|} \int_S [s(\xi, \eta)]^q \, d\xi d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|S|} \int_{B_{m-r}} [s(\xi, \eta)]^q \, d\xi d\eta\,^{1)}.$$

Но, в силу (4.10), последний член стремится к 0, когда $k = m - r \to \infty$, и равенство (4.9) доказано.

Для того чтобы построить искомую гармоническую мажоранту, для всех $\varepsilon > 0$ и $y > 0$ положим

$$m_\varepsilon(x, y) = \int_{E_n} s(x - t, \varepsilon) P(t, y)\, dt = \int_{E_n} s(t, \varepsilon) P(x - t, y)\, dt.$$

Тогда, в силу неравенства (2.2), имеем

$$\int_{E_n} [m_\varepsilon(x, y)]^q \, dx \leqslant c^q \tag{4.11}$$

для всех $\varepsilon > 0$ и $y > 0$. Кроме того, из равенства (4.9) и теоремы 2.1 (b) следует, что

$$0 = \lim_{y \to 0} \| s(\cdot, \varepsilon) - m_\varepsilon(\cdot, y) \|_\infty = \lim_{y \to 0} \{ \sup_{x \in E_n} | s(x, \varepsilon) - m_\varepsilon(x, y) | \}.$$

Отсюда можно заключить, что если δ — положительное число, то существует достаточно малое $y_0 > 0$, такое, что $s(x, \varepsilon + y_0) - m_\varepsilon(x, y_0) < \delta$ для всех $x \in E_n$. Учитывая равенство (4.9), видим, что $s(x, \varepsilon + y) - m_\varepsilon(x, y) < \delta$, когда $|x|$ или yвелико, скажем $x| \geqslant k$ или $y \geqslant y_1$. Таким образом, неравенство

$$s(x, \varepsilon + y) - m_\varepsilon(x, y) < \delta$$

выполняется на границе области $R = \{(x, y) \in E_{n+1}^+;\ |x| \leqslant k, y_0 \leqslant y \leqslant y_1\}$. Просматривая доказательство принципа максимума для гармонических функций, приходим к выводу, что было использовано только среднее значение из равенства (4.2); следовательно, этот принцип справедлив и для субгармонических функций. Применяя его к субгармонической функции $s(x, \varepsilon + y) - m_\varepsilon(x, y)$ ($-m$, будучи гармонической, одновременно и субгармонична) и области R, видим, что последнее неравенство справедливо во всей R. Устремляя $\delta \to 0$ и соответственно k, $y_1 \to \infty$ и $y_0 \to 0$, полу-

---

1) Неравенство (4.2) утверждает, что среднее значение функции s по площади сферы радиуса r с центром в точке x_0 превосходит $s(x_0)$. Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве леммы 2.6, можно показать, что $s(x_0)$ не превосходит среднего значения функции s по объему шара радиуса r с центром в точке x_0. Это неравенство, примененное к функции s^q в точке (x, y), и было использовано здесь.

чим

$$s(x, \varepsilon + y) \leqslant m_\varepsilon(x, y) \tag{4.12}$$

для всех $(x, y) \in E_{n+1}^{+}$.

Используя те же самые рассуждения, что и при доказательстве теоремы 2.5 (с функцией u, замененной на s, и p, замененной на q), можно найти сходящуюся к 0 последовательность $\{\varepsilon_k\}$ и, если $q > 1$, L^q-функцию f, такую, что

$$\lim_{k\to\infty} m_{\varepsilon_k}(x, y) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{E_n} s(t, \varepsilon_k) P(x-t, y)\,dt =$$

$$= \int\limits_{E_n} f(t) P(x-t, y)\,dt = m(x, y);$$

при $q = 1$ вместо f существует конечная борелевская мера μ, такая, что

$$\lim_{k\to\infty} m_{\varepsilon_k}(x, y) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{E_n} s(t, \varepsilon_k) P(x-t, y)\,dt =$$

$$= \int\limits_{E_n} P(x-t, y)\,d\mu(t = m(x, y).$$

В обоих случаях, полагая $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$, из неравенства (4.12) получим

$$s(x, y) \leqslant m(x, y).$$

Функция m и есть искомый интеграл Пуассона (или Пуассона — Стилтьеса). То, что m есть наименьшая гармоническая мажоранта функции s, следует из того очевидного факта, что $m_\varepsilon(x, y)$ — наименьшая гармоническая мажоранта функции $s(x, \varepsilon + y)$: для любой гармонической мажоранты h функции s справедливо неравенство

$$m(x, y) = \lim_{k\to\infty} m_{\varepsilon_k}(x, y) \leqslant \lim_{k\to\infty} h(x, \varepsilon_k + y) = h(x, y).$$

5. Дальнейшие результаты

5.1. В начале этой главы было введено среднее значение $\mathcal{M}_{x,u}(r) = \mathcal{M}(r)$ функции u, взятое по площади сферы $S_r(x)$ радиуса r с центром в точке x. Естественно ввести также среднее значение

$$\mathcal{A}_{x,u}(r) = \mathcal{A}(r) = \frac{1}{\Omega_n r^n} \int\limits_{|t|\leqslant r} u(x+t)\,dt$$

функции u, взятое по объему шара $S_r(x)$. Можно, следовательно, рассматривать два различных свойства среднего значения: одно,

введенное в начале этой главы, и аналогичное ему другое, использующее среднее значение $\mathcal{A}(r)$. Рассуждения, использованные в начале доказательства леммы 2.6, показывают, что если функция обладает первым из этих свойств, то она обладает и вторым. Аналогично, как было показано при доказательстве теоремы 4.6, функция, удовлетворяющая неравенству (4.2), удовлетворяет и неравенству, полученному из (4.2) заменой $\mathcal{M}(r)$ на $\mathcal{A}(r)$. Нетрудно показать, что, заменяя $\mathcal{M}(r)$ на $\mathcal{A}(r)$, получим другие критерии гармоничности и субгармоничности, аналогичные критериям теоремы 1.7 и неравенства (4.2) (см. Радо [1] [1]).

5.2. Имеется несколько результатов, касающихся гармонических (и аналитических) функций, определенных на неограниченных областях, которые являются обобщением принципа максимума, сформулированного в следствии 1.3′. Эти результаты можно описать в общем виде следующим образом. Пусть дана непрерывная функция, определенная на замкнутой неограниченной области $\overline{\mathcal{E}} \subset E_n$ и гармоническая на $\mathcal{E}$. Если эта функция удовлетворяет некоторым слабым ограничениям на рост (когда $x \in \mathcal{E}$ стремится к ∞) и некоторым более сильным условиям на границе $\mathcal{E}$ (часто функция предполагается ограниченной на $\partial\mathcal{E}$), то она удовлетворяет этим более сильным условиям во всей $\mathcal{E}$. Такие утверждения часто называют *теоремами типа Фрагмена — Линделёфа.* Следствие 1.15 есть особенно простой пример подобного утверждения. Следующий пример теоремы типа Фрагмена — Линделёфа является значительно более общим. Пусть функция u гармонична в E_{n+1}^{+}, непрерывна на $\overline{E_{n+1}^{+}} = E_{n+1}^{+} \cup E_n$ и удовлетворяет оценке $u(x, y) = o(e^{a|x|})$ при $|x| \to \infty$ для всех $a > 0$ в каждой полосе вида $S = \{(x, y) \in E_{n+1}^{+};\ 0 < y \leqslant y_0\}$. Если, кроме того, $u(x, y) = o(y)$ при $y \to \infty$, то:

(a) из $u(x, 0) \leqslant A < \infty$ для всех $x \in E_n$ следует, что $u(x, y) \leqslant A$ для всех $(x, y) \in E_{n+1}^{+}$;

(b) из $u(x, 0) \geqslant B > -\infty$ для всех $x \in E_n$ следует, что $u(x, y) \geqslant B$ для всех $(x, y) \in E_{n+1}^{+}$;

(c) из $|u(x, 0)| \leqslant C < \infty$ для всех $x \in E_n$ следует, что $|u(x, y)| \leqslant C$ для всех $(x, y) \in E_{n+1}^{+}$.

При доказательстве утверждения (b) можно положить $B = 0$, так как общий случай сводится к этому рассмотрением функции $u(x, y) - B$. Фиксируем $\delta > 0$ и положим $g(x, y) = \sin(a\sqrt{n}(y + \delta)) \prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch} ax_k$; тогда g — гармоническая в E_{n+1} функция (см.

[1] Или Привалов [1].— *Прим. ред.*

пример (6) в начале этой главы). Утверждение (b) будет доказано, если мы покажем, что $u(x, y)+\varepsilon y+\eta g(x, y)\geqslant 0$ в $\overline{E_{n+1}^{+}}$ для любых фиксированных $\varepsilon>0$ и $\eta>0$. Из принципа минимума следует, что достаточно показать, что это неравенство выполняется на границе цилиндра вида $\{(x, y)\in E_{n+1};\ |x|\leqslant N, 0\leqslant y\leqslant y_0\}$ для всех достаточно больших N и y_0. Выбирая $a>0$ и $\delta>0$ так, чтобы $a<\pi/\sqrt{n}(y_0+\delta)$, получим, что $\sin(a\sqrt{n}(y+\delta))$ положителен и ограничен снизу положительным числом, когда $0\leqslant y\leqslant y_0$ и, кроме того,

$$\prod_{k=1}^{n}\operatorname{ch} ax_k\geqslant 2^{-n}\prod_{k=1}^{n}e^{a|x_k|}=2^{-n}\exp\left\{a\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right\}\geqslant$$
$$\geqslant 2^{-n}\exp\{a|x|\}.$$

Эти оценки вместе с предположением, что $u(x, y)=o(e^{a|x|})$ и $u(x, y)=o(y)$, дают требуемое неравенство $u(x, y)+\varepsilon y+\eta g(x, y)\geqslant 0$ для $|x|\geqslant N$ (если N достаточно большое) и $0\leqslant y\leqslant y_0$. Уменьшая должным образом число a, можно выбрать число y_0 как угодно большим. Отсюда и следует утверждение (b). Утверждение (a) получается из (b) рассмотрением функции $-u$, а из этих двух результатов, очевидно, следует утверждение (c).

5.3. Мы показали (см. лемму 2.6 и неравенство (4.8)), что если (неотрицательная) субгармоническая в E_{n+1}^{+} функция s удовлетворяет оценке $\|s(\cdot, y)\|_p\leqslant c$ для всех $y>0$ и некоторого $p\geqslant 1$, то $\|s(\cdot, y)\|_\infty=O(y^{-n/p})$. Следствием этого факта будет более общая оценка $\|s(\cdot, y)\|_q=O(y^{(n/q)-(n/p)})$, когда $q\geqslant p$. Для того чтобы в этом убедиться, заметим, что

$$\int_{E_n}[s(x, y)]^q\,dx=\int_{E_n}[s(x, y)]^p[s(x, y)]^{q-p}\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\|s(\cdot, y)\|_\infty^{q-p}c^p\leqslant A[y^{-n/p}]^{(q-p)}.$$

Искомое неравенство получается отсюда извлечением из обеих частей корней q-й степени.

5.4. Теоремы 3.19 и 3.24 указывают, что понятие некасательной сходимости на границе существенно. То, что это действительно так, можно увидеть из следующих двух результатов, касающихся функций, определенных на единичном круге (аналогичные результаты для верхней полуплоскости можно получить с помощью конформного отображения).

(i) Пусть C_0 — простая (без самопересечений) замкнутая кривая, проходящая через точку $z=1$, все остальные точки которой лежат внутри единичной окружности $K=\{z=x+iy;\ |z|=1\}$.

Пусть, далее, кривая C_0 касается единичной окружности в точке 1, и пусть C_θ — кривая, полученная вращением C_0 на угол θ вокруг начала координат. Тогда существует ограниченная аналитическая функция F, определенная внутри K и такая, что для почти всех θ величина $F(z)$ не имеет предела, когда z стремится к $e^{i\theta}$ по кривой C_θ (см. Зигмунд [1], т. I).

(ii) Пусть G — непрерывная функция, определенная внутри единичной окружности K, и пусть E — множество первой категории, лежащее на K. Тогда существует аналитическая функция F, определенная внутри K и такая, что

$$\lim_{r\to 1}\{F(re^{i\theta}) - G(re^{i\theta})\} = 0$$

для всех $e^{i\theta} \in E$ (см. Зигмунд [1], т. II).

Поскольку E может иметь меру 2π, последний результат утверждает, что радиальное поведение аналитической функции почти во всех точках K не лучше, чем у непрерывной функции. Так, например, аналитическая функция F может стремиться к 0 вдоль почти каждого радиуса и, тем не менее, не быть равной 0 тождественно. С другой стороны, аналитическая функция, имеющая некасательный предел 0 в точках множества положительной меры на K, должна обращаться в нуль тождественно (см. Зигмунд [1], т. II). Более того, аналитическая функция может быть ограниченной (хотя, очевидно, не равномерно) почти на каждом радиусе и, тем не менее, не иметь радиальных пределов почти во всех точках K.

5.5. Теорема 3.19 имеет несколько обобщений. Карлесон [1] показал, что тот же самый результат справедлив, если предположить, что (вещественнозначная) гармоническая функция u некасательно ограничена снизу или сверху во всех точках S. В двумерном случае этот результат с помощью конформного отображения легко обобщается на области более общего вида, чем верхняя полуплоскость. Хант и Уиден [1] получили подобное обобщение на высшие размерности для областей $\mathcal{D}$, границы которых удовлетворяют условию Липшица. Они показали, что если функция u гармонична в такой области $\mathcal{D}$, множество $S \subset \partial\mathcal{D}$ таково, что для каждой точки $q \in S$ существует открытый конус с вершиной в q, направленный внутрь $\mathcal{D}$, и функция u ограничена снизу (или сверху) в усеченном конусе с вершиной в точке q для всех $q \in S$, то u имеет конечный некасательный предел в каждой точке S, за исключением, возможно, множества гармонической меры 0.

5.6. Слегка изменив рассуждения, использованные при доказательстве леммы 3.3, можно получить следующий близкий результат. Пусть каждой точке x ограниченного множества $F \subset E_n$ поставлен в соответствие непустой открытый шар S_x с центром в

точке x. Тогда существует счетное семейство $\{S_{x_i}\}$ таких шаров, покрывающее F и такое, что каждая точка $x \in E_n$ принадлежит не более чем a_n этих шаров (a_n зависит только от размерности; фактически можно выбрать a_n равным 3^n). Используя этот результат, можно обобщить теорему 3.4. Пусть ν_1 и ν_2 — две неотрицательные конечные борелевские меры на E_n и $\varphi(x) = \sup\{\nu_1(S_x)/\nu_2(S_x)\}$, где верхняя грань берется по всем открытым шарам S_x с центром в точке $x \in E_n$ (если ν_2 — лебегова мера и $\nu_1(S_x) = \int\limits_{S_x} f dx$ с некоторой интегрируемой функцией f, то φ — максимальная функция Харди — Литтлвуда m_f). Тогда для $F_s = \{x \in E_n;\ \varphi(x) > s > 0\}$ имеем $\nu_2(F_s) \leqslant a_n \nu_1(E_n) s^{-1}$. Используя это, можно показать, что ν_1 дифференцируема по отношению к ν_2, т. е. предел $\lim\{\nu_1(S_x)/\nu_2(S_x)\} = f(x)$ существует для всех $x \in E_n$ вне некоторого множества ν_2-меры 0, причем этот предел берется по всем шарам с центрами в точке x и радиусами, стремящимися к 0. Если разложить меру ν_1 на абсолютно непрерывную и сингулярную части по отношению к мере ν_2, то производная Радона — Никодима первой части будет почти всюду равна $f(x)$ (опять по отношению к ν_2). Наконец, отметим, что эти результаты остаются справедливыми, если шары заменить другими геометрическими телами (см. Котлар [1], стр. 126—127).

5.7. В теореме 3.22 и следствии 3.23 мы предполагали, что $1 < p < \infty$. Случай $p = \infty$ обсуждался в конце доказательства теоремы 3.22. Там было указано, что в этом случае результат получается аналогичным образом. Случай $p = 1$ полностью отличается: можно показать, что существуют, например, такие функции $f \in L^1(E_2)$, для которых повторные интегралы Пуассона

$$u(x_1, \varepsilon_1, x_2, \varepsilon_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1 - t_1, x_2 - t_2) P(t_1, \varepsilon_1) P(t_2, \varepsilon_2)\, dt_1 dt_2$$

не сходятся к $f(x_1, x_2)$ при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ для почти всех $x = (x_1, x_2) \in E_2$. (См. Иессен, Марцинкевич и Зигмунд [1], где рассматриваются повторные интегралы Пуассона для единичной окружности. Приведенные там рассуждения можно изменить так, чтобы охватить обсуждаемый здесь случай.) См. также пп. 6.6 и 6.8 гл. III.

5.8. Из развитой здесь теории субгармонических функций легко следует, что если функция s имеет непрерывные вторые частные производные, то следующие три условия эквивалентны: (i) s субгармонична; (ii) $\Delta s \geqslant 0$; (iii) пусть $\mathcal{R}$ — ограниченная область, замыкание которой содержится в области определения функции s, u — непрерывная на $\overline{\mathcal{R}}$ и гармоническая в $\mathcal{R}$ функция, такая, что $u \geqslant s$ на границе $\partial\mathcal{R} = \overline{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{R}$; тогда $u \geqslant s$ в $\mathcal{R}$ (см. теорему

4.5). Существует несколько способов обобщения этих результатов. Обрисуем здесь одно такое обобщение, тесно связанное с идеями нашего подхода к обобщенным функциям медленного роста (см. § 3 гл. I). Будем говорить, что непрерывная функция s, определенная в некоторой области D, имеет неотрицательный обобщенный лапласиан, если $\int_D s\Delta\varphi \geqslant 0$ для любой неотрицательной функции φ класса C^∞ с компактным носителем, лежащим в области D (интегрируя по частям, видим, что если s имеет непрерывные вторые частные производные, то это свойство эквивалентно приведенному выше условию (ii)). Прежде всего докажем, что такая функция s субгармонична. Для этого покажем, что s удовлетворяет неравенству среднего значения (4.2). С учетом теоремы 1.25 гл. I достаточно показать, что это так для каждой (всюду определенной) функции $s_\varepsilon(x) = \int_D s(t)\,\varphi_\varepsilon(x-t)\,dt$, где φ — неотрицательная функция класса C^∞ с компактным носителем, интеграл которой равен 1, а $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Из теоремы 4.3 следует, что это имеет место, когда $\Delta s_\varepsilon \geqslant 0$. Как было замечено выше, это эквивалентно тому, что $\int_D s_\varepsilon\Delta\psi \geqslant 0$ для всех неотрицательных функций ψ класса C^∞ с компактным носителем в D. Выбирая ε достаточно малым, а носитель ψ лежащим внутри подходящего компактного подмножества области D, получим, что $\int_D s_\varepsilon\Delta\psi = \int_D s\Delta(\tilde{\varphi}_\varepsilon * \psi) \geqslant 0$ ($\tilde{\varphi}$ обозначает отражение φ, определенное в гл. I перед равенством (3.12)). Отсюда следует, что s — субгармоническая функция. Теорема 4.5 утверждает, что из условия (i) в свою очередь следует свойство гармонического мажорирования (iii). Очевидно, однако, что из последнего вытекает неравенство среднего значения (4.2). Предполагая, что s обладает последним свойством, легко показать, что она имеет неотрицательный обобщенный лапласиан. Пусть η_δ — функция, полученная делением на $\Omega_n\delta^n$ характеристической функции шара радиуса δ с центром в 0. Тогда (4.2) можно записать в виде неравенства $s \leqslant s * \eta_\delta$. Далее, $\int_D s\varphi \leqslant \int_D (s * \eta_\delta)\,\varphi$, или, что то же самое,

$$\int_D s\,(\eta_\delta * \varphi - \varphi) \geqslant 0$$

для всех неотрицательных функций φ класса C^∞ с компактными носителями в D. Но $\{\eta_\delta * \varphi - \varphi\}/\delta^2$ стремится к умноженной на $\Delta\varphi$ положительной постоянной, когда δ стремится к 0; следовательно, $\int_D s\Delta\varphi \geqslant 0$.

Библиографические замечания

Исчерпывающее изложение теории гармонических функций трех переменных дано в книге Келлога [1]. Более современный подход к общей n-мерной теории см. в книге Брело [1]. Описание интегралов Пуассона — это классический результат, и доказательства, приведенные здесь, немногим отличаются от доказательств, используемых для описания средних Абеля и Чезаро тригонометрических рядов, которые можно найти в книге Зигмунда [1], гл. III. Теорема 3.10 и неравенство (3.18) являются обобщениями на верхние полупространства соответствующих результатов для интегралов Пуассона функций, определенных на единичной окружности, первоначально полученных Харди и Литтлвудом [1]. Теоремы 3.19 и 3.24 принадлежат Кальдерону [1]. Максимальная функция [1)] впервые была введена в одномерном случае Харди и Литтлвудом [1]. Обобщение на несколько переменных принадлежит Винеру [2]. В связи с использованной здесь леммой о покрытии см. Винер [2], Марцинкевич и Зигмунд [1], Безикович [2], Котлар [1] и де Гусман [1]. Теорема 3.12 тесно связана с одним результатом Котлара [1]; более ранний и более общий результат принадлежит Банаху [1]. Исчерпывающее изложение теории субгармонических функций имеется в книгах Радо [1] или Привалова [1]. Теорему 4.6 можно найти у Стейна и Вейса [1] [2)]. Более полное изложение сильной дифференцируемости интегралов см. в книге Сакса [1].

[1)] Идея осреднения, заложенная в понятии максимальной функции, на самом деле принадлежит В. А. Стеклову (1907 г.). См. примечание редактора на стр. 65.— *Прим. ред.*

[2)] Для случая $s(x, y) = |f(z)|$, где $f(z)$ — аналитическая функция в верхней полуплоскости, $n = 2$, этот факт см. в статье Крылова [1]. См. также работу Соломенцева [1].— *Прим. перев.*

Глава III

ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВ H^p НАД ТРУБЧАТЫМИ ОБЛАСТЯМИ

Для того чтобы обеспечить существование граничных значений гармонических функций, определенных в верхнем полупространстве, следует наложить на них довольно сильные ограничения. Этот вопрос изучался в §§ 2 и 3 предыдущей главы. Однако если рассмотреть систему гармонических функций, удовлетворяющую определенным уравнениям в частных производных (например, вещественная и мнимая части аналитической функции образуют такую систему, удовлетворяющую уравнениям Коши — Римана), то для обеспечения существования граничных значений достаточно более слабых ограничений. Эти вопросы подробно рассматриваются в § 1. Остальная часть главы посвящена теории голоморфных функций, определенных в трубчатых областях. Трубчатые области являются, вероятно, наиболее естественными областями для изучения связи между теорией голоморфных функций нескольких комплексных переменных и гармоническим анализом. В § 2 изучается теория пространств H^2 таких функций. В § 3 рассматривается важный частный случай таких пространств: пространства H^2 над трубчатыми областями с коническим основанием. Как следствие этих результатов в § 4 получается обобщение теоремы Пэли — Винера на несколько переменных. В § 5 более общие пространства H^p над трубчатыми областями изучаются посредством редукции к трубчатым областям с основаниями в виде конусов специального вида.

1. Вводные замечания

Как мы видели в предыдущей главе (см. теорему 2.1), интеграл Пуассона функции $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, дает гармоническую функцию u, определенную на E_{n+1}^+ и такую, что

$$\int\limits_{E_n} |u(x, y)|^p\, dx \leqslant A^p < \infty \tag{1.1}$$

для всех $y > 0$, где $A = \|f\|_p$. Кроме того, $u(x, y)$ некасательно сходится к $f(x)$ для почти всех $x \in E_n$ (см. теорему 3. 2).

Теорема 2.5 предыдущей главы утверждает, что неравенства типа (1.1) характеризуют гармонические в E_{n+1}^+ функции, являющиеся интегралами Пуассона, и, таким образом, обеспечивают существование некасательных граничных значений. Можно показать, что эти результаты наилучшие возможные в том смысле, что при $0 < p < 1$ из неравенства (1.1) не следует существование таких граничных значений при $y \to 0$, т. е. для таких p существует гармоническая функция, удовлетворяющая неравенству (1.1) и *не имеющая* некасательных пределов почти всюду на границе E_n множества E_{n+1}^+.

При $n = 1$ ситуация очень сильно изменяется, если вместо гармонических функций рассматривать аналитические функции. Например, если $F(z) = F(x + iy)$ — голоморфная при $y > 0$ (т. е. в верхней полуплоскости E_2^+) функция, удовлетворяющая при $p > 0$ оценке

$$(1.2) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^p \, dx \leqslant A^p < \infty, \qquad y > 0,$$

то $\lim\limits_{z \to x} F(z) = F(x)$ существует для почти всех $x \in (-\infty, \infty)$, когда z приближается к x некасательно. Класс всех голоморфных в E_2^+ функций, удовлетворяющих (1.2) с некоторой постоянной $A < \infty$, обозначается $H^p = H^p(E_2^+)$. Более известны соответствующие пространства H^p, связанные с единичным кругом $D = \{z \in E_2;\ |z| < 1\}$. Они состоят из аналитических в D функций F, удовлетворяющих оценке

$$(1.3) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^p \, d\theta \leqslant A^p < \infty, \qquad 0 \leqslant r < 1.$$

Здесь также некасательные пределы $F(e^{i\theta})$ существуют для почти всех $\theta \in [-\pi, \pi]$. Более того, в обоих случаях это пределы по «норме», т. е. если $F \in H^p(E_2^+)$, то

$$(1.4) \qquad \lim_{y \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy) - F(x)|^p \, dx = 0,$$

а если $F \in H^p(D)$, то

$$(1.4') \qquad \lim_{r \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta}) - F(e^{i\theta})|^p \, d\theta = 0.$$

Мы намереваемся обобщить эти понятия и результаты на высшие размерности. На этом пути мы встретимся с несколькими существенно различными подходами. Один из них, связанный с теорией функций нескольких комплексных переменных, состоит в следующем. Пусть B — открытое множество в E_n. Тогда *трубчатой областью* T_B *с основанием* B называется множество всех $z = (z_1, \ldots, z_n) = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) = x + iy \in \mathbf{C}_n$ ($= n$-мерное комплексное евклидово пространство), таких, что $y \in B$. Например, E_2^+ — трубчатая область в $\mathbf{C}_1$ с основанием $B = \{y \in E_1;$

$y > 0\}$. Говорят, что функция, определенная и голоморфная [1] в трубчатой области T_B, принадлежит пространству $H^p = H^p(T_B)$, $p > 0$, если существует постоянная $A < \infty$, такая, что

$$\int_{E_n} |F(x+iy)|^p\,dx \leqslant A^p \quad \text{для всех} \quad y \in B. \tag{1.5}$$

Это определение, очевидно, обобщает определение пространств $H^p(E_2^+)$. Норма функции $F \in H^p(T_B)$ — положительное число $\|F\|_p$, определяемое как наименьшее число A, для которого выполняется неравенство (1.5).

Другой подход опирается на тот факт, что функция $F = u + iv$ одной комплексной переменной является аналитической в односвязной области тогда и только тогда, когда (v, u) есть градиент некоторой гармонической в этой области функции. Таким образом, можно рассматривать векторнозначную функцию $F = (u_1, \ldots, u_n)$, определенную в некоторой области пространства E_n, как «обобщенную аналитическую функцию», если она является градиентом некоторой гармонической в этой области функции. Более общим образом, можно рассмотреть векторнозначную функцию $F = (u_1, \ldots, u_n)$, определенную в области $D \subset E_n$ и удовлетворяющую системе уравнений в частных производных

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \tag{1.6}$$

$i, j = 1, \ldots, n$. Эти условия можно также сформулировать в виде

$$\operatorname{div} F = 0, \qquad \operatorname{rot} F = 0. \tag{1.6$'$}$$

Заметим, что из второго условия следует, что в односвязной подобласти D вектор F есть градиент некоторой функции h, в то время как из первого условия следует, что h гармоническая. При $n = 2$ уравнения (1.6) переходят в уравнения Коши — Римана; в этом случае $u_2 + iu_1$ — аналитическая функция переменной $z = x_1 + ix_2$. Если F — такая функция, определенная в E_{n+1}^+, и если существует постоянная $A < \infty$, такая, что

$$\int_{E_n} |F(x, y)|^p\,dx = \int_{E_n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} |u_j(x, y)|^2\right)^{p/2} dx \leqslant A^p \tag{1.7}$$

[1] Функция F с областью определения $D \subset \mathbf{C}_n$ называется *голоморфной* в D, если для каждой точки $z_0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0) \in D$ существует поликруг $\{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}_n;\ |z_1 - z_1^0| < r_1, \ldots, |z_n - z_n^0| < r_n\} \subset D$, в котором F представляется в виде абсолютно сходящегося степенного ряда:

$$F(z) = \sum_{k_1, \ldots, k_n \geqslant 0} a_{k_1 \ldots k_n} (z_1 - z_1^0)^{k_1} \ldots (z_n - z_n^0)^{k_n}.$$

для всех $y > 0$ [1], то мы получаем обобщение определения пространств $H^p\ (E_2^+)$.

В этой главе изучаются пространства H^p, связанные с трубчатыми областями. Второе обобщение будет изучаться в главе VI.

2. H^2-теория

Фиксируем открытое связное подмножество $B \subset E_n$ и будем изучать пространство $H^2(T_B)$. Нетрудно построить функции, принадлежащие этому пространству. Действительно, пусть f — такая функция, что

$$\sup_{y \in B} \int_{E_n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y \cdot t}\, dt \leqslant A^2 < \infty. \tag{2.1}$$

Будем писать $z = x + iy$ и $z \cdot t = z_1 t_1 + \cdots + z_n t_n$. Покажем, что $|e^{2\pi i z \cdot t} f(t)| = e^{-2\pi y \cdot t} |f(t)|$ мажорируется интегрируемой функцией, когда y лежит в некотором компактном подмножестве множества B. Заметим, что если это так, то

$$F(z) = \int_{E_n} e^{2\pi z \cdot t} f(t)\, dt \tag{2.2}$$

будет голоморфной в T_B функцией.

Достаточно показать, что $e^{-2\pi y \cdot t} |f(t)|$ мажорируется интегрируемой функцией в окрестности произвольной точки $y_0 \in B$. Так как множество B открыто, такая окрестность $N \subset B$ заведомо существует; кроме того,

$$\int_{E_n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y_0 \cdot t} e^{-4\pi (y - y_0) \cdot t} dt \leqslant A^2$$

при $y \in N$. Разобьем E_n на конечное число непересекающихся многогранных конусов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ с вершинами в начале координат, таких, что для любых двух точек v и w, лежащих в каком-либо из этих конусов, угол между отрезками $0v$ и $0w$ меньше, чем, скажем, $\pi/4$. Поскольку N — окрестность точки y_0, существует такое $\delta > 0$, что $\{y;\ |y - y_0| = \delta\} \subset N$. Положим $\varepsilon = 4\pi\delta/\sqrt{2}$ и выберем такое y, что $(y_0 - y) \in \Gamma_j$ и $|y - y_0| = \delta$; тогда $\varepsilon |t| \leqslant -4\pi (y - y_0) \cdot t$ для всех $t \in \Gamma_j$. Следовательно,

$$\int_{\Gamma_j} |f(t)|^2 e^{-4\pi y_0 \cdot t} e^{\varepsilon |t|} dt \leqslant \int_{\Gamma_j} |f(t)|^2 e^{-4\pi y_0 \cdot t} e^{-4\pi (y - y_0) \cdot t} dt \leqslant A^2.$$

---

[1] Обращаем внимание читателя на то, что неравенство (1.7) относится к гармоническим функциям $n + 1$ переменных с $y = x_{n+1}$.

Отсюда

$$\int_{E_n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y_0\cdot t} e^{\varepsilon|t|} dt = \sum_{j=1}^{k} \int_{\Gamma_j} |f(t)|^2 e^{-4\pi y_0\cdot t} e^{\varepsilon|t|} dt \leqslant kA^2 < \infty.$$

Таким образом,

$$\int_{E_n} |f(t)| e^{-2\pi y_0\cdot t} e^{(\varepsilon/4)|t|} dt = \int_{E_n} (|f(t)| e^{(\varepsilon/2)|t|} e^{-2\pi y_0\cdot t}) e^{-(\varepsilon/4)|t|} dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{E_n} |f(t)|^2 e^{\varepsilon|t|} e^{-4\pi y_0\cdot t} dt \right)^{1/2} \left(\int_{E_n} e^{-(\varepsilon/2)|t|} dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Пусть теперь y лежит в шаре радиуса $\varepsilon/8\pi$ с центром в точке y_0; тогда, в силу неравенства

$$|f(t)| e^{-2\pi y\cdot t} \leqslant |f(t)| e^{-2\pi y_0\cdot t} e^{(\varepsilon/4)|t|},$$

выражение $|f(t)| e^{-2\pi y\cdot t}$ является интегрируемой функцией t.

Непосредственное применение теоремы Планшереля дает

$$\int_{E_n} |F(x+iy)|^2 dx = \int_{E_n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y\cdot t} dt \leqslant A^2 < \infty$$

для всех $y \in B$. Таким образом, аналитическая функция $F(z)$, определенная равенством (2.2), принадлежит пространству $H^2(T_B)$. Основная теорема о представлении функций из $H^2(T_B)$ утверждает, что все функции из этого пространства имеют такой вид, а именно

Теорема 2.3. *Функция F принадлежит пространству $H^2(T_B)$ тогда и только тогда, когда она имеет вид* (2.2), *где f — функция, удовлетворяющая оценке* (2.1).

Проиллюстрируем важность этой теоремы, доказав сначала несколько следствий из нее. Доказательство же самой теоремы отложим до конца этого параграфа.

Пусть $B \subset E_n$; обозначим через B^c *выпуклую оболочку* множества B, т. е. наименьшее выпуклое множество, содержащее B. Очевидно, что B^c состоит из всех конечных сумм вида $x = \sum \lambda_i x_i$, где $\sum \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$ и $x_i \in B$. Отсюда немедленно следует, что если B — открытое множество, то B^c также открыто. Приводимое ниже следствие показывает, что можно ограничиться выпуклыми основаниями B.

Следствие 2.4. *Пусть $F \in H^2(T_B)$; тогда интеграл* (2.2) *определен для всех $z \in T_{B^c}$ и дает функцию из $H^2(T_{B^c})$ с такой же, как и у F, нормой.*

Доказательство. Отметим сначала, что из теоремы Планшереля вместе с теоремой 2.3 следует, что

$$\|F\|_2 = \sup_{y \in B} \left(\int_{E_n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y \cdot t} dt \right)^{1/2}. \tag{2.5}$$

Положим

$$S = \left\{ y \in E_n;\ \int_{E_n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y \cdot t} dt \leqslant \|F\|_2^2 \right\}.$$

Ясно, что $B \subset S$, и достаточно показать, что множество S выпукло. Предположим, следовательно, что $y', y'' \in S$ и $y = \alpha y' + (1-\alpha) y''$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Используя неравенство $u^\alpha v^{1-\alpha} \leqslant \alpha u + (1-\alpha) v$ (справедливое для любых двух неотрицательных чисел u и v), получим

$$\int_{E_n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y \cdot t} dt = \int_{E_n} |f(t)|^2 e^{-4\pi \alpha y' \cdot t} e^{-4\pi(1-\alpha) y'' \cdot t} dt =$$

$$= \int_{E_n} (|f(t)|^2 e^{-4\pi y' \cdot t})^\alpha (|f(t)|^2 e^{-4\pi y'' \cdot t})^{1-\alpha} dt \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \int_{E_n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y' \cdot t} dt + (1-\alpha) \int_{E_n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y'' \cdot t} dt \leqslant$$

$$\leqslant \|F\|_2^2.$$

Таким образом, $y \in S$, откуда и следует, что множество S выпукло. Это завершает доказательство.

Следствие 2.6. *Для того чтобы пространство $H^2(T_B)$ содержало функции, не равные тождественно нулю, необходимо и достаточно, чтобы никакая прямая не лежала целиком в множестве B.*

Доказательство. Предположим, что множество B содержит прямую, состоящую из всех точек y, удовлетворяющих равенству $y = a\tau + b$, $-\infty < \tau < \infty$. Пусть $N(t_0)$ — шарообразная окрестность в E_n точки t_0, такая, что $a \cdot t$ отграничено от нуля в этой окрестности. Тогда для точек y этой прямой, произвольной функции $F \in H^2(T_B)$ и функции f, удовлетворяющей равенству (2.2) и оценке (2.1) (существование такой функции f гарантируется

теоремой 2.3), имеем

$$\|F\|_2^2 \geqslant \int_{E_n} |f(t)|^2 \, {}^{-4\pi y\cdot t} dt \geqslant \int_{N(t_0)} |f(t)|^2 e^{-4\pi\tau(a\cdot t)} e^{-4\pi(b\cdot t)} dt.$$

Но, так как τ можно положить равным произвольному вещественному числу, член $e^{-4\pi(a\cdot t)\tau}$ можно сделать как угодно большим в $N(t_0)$. Отсюда следует, что $f(t)=0$ для почти всех t из $N(t_0)$, и первая часть следствия доказана.

Для того чтобы показать, что если B не содержит прямой, то в $H^2(T_B)$ найдется функция $F \not\equiv 0$, заметим сначала, что такое множество B всегда лежит в некотором открытом выпуклом конусе Γ, не содержащем полностью ни одной прямой [1]. Позднее будет показано (см. теорему 3.1), что для таких конусов пространство $H^2(T_\Gamma)$ содержит $F \not\equiv 0$. Это завершит доказательство следствия 2.6.

В свете одномерной теории можно было бы ожидать, что центральным вопросом теории пространств H^p над трубчатой областью T_B будет следующий: *пусть y_0 — граничная точка множества B; существует ли предел*

$$F(x+iy_0) = \lim_{y\to y_0,\, y\in B} F(x+iy), \tag{2.7}$$

и если существует, то в каком смысле?

На этот вопрос можно дать утвердительный, но не совсем удовлетворительный ответ. Отметим сначала, что если y_0 — граничная точка множества B, то из леммы Фату и равенства (2.5) следует, что

$$\int_{E_n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y_0\cdot t} dt \leqslant \|F\|_2^2.$$

Таким образом, поскольку $f(t)e^{-2\pi y_0\cdot t}$ — функция из $L^2(E_n)$, можно распространить интеграл (2.2) на $z = x+iy_0$, взяв обратное преобразование Фурье функции $f(t)e^{-2\pi y_0\cdot t}$. Теперь, положив формально

$$F(x+iy_0) = \int_{E_n} e^{2\pi i(x+iy_0)\cdot t} f(t)\, dt, \tag{2.8}$$

получаем почти всюду определенную L^2-функцию переменной x. Таким образом, взяв преобразования Фурье функций $F_y =$

---

[1] Мы дадим набросок доказательства этого геометрического факта в п. 6.15 ниже.

$=F(\cdot + iy)$, перейдя к пределу и затем взяв обратное преобразование Фурье, можно придать смысл пределу в (2.7).

Естественно было бы ожидать, что, как и в случае одной переменной, $F(x+iy)$ сходится к $F(x+iy_0)$, когда $y \to y_0$, $y \in B$, либо по L^2-норме, либо для почти всех x. Однако, как мы сейчас покажем, в общем случае это не так.

Пусть l — прямая в E_2 и y_1 — точка вне нее. Уравнение прямой l можно записать в виде $y \cdot a = \beta$ с некоторыми фиксированными вектором a и вещественным числом β. Пространство E_2 при этом распадается на два непересекающихся полупространства: множество всех y, таких, что $y \cdot a > \beta$, и множество всех y, таких, что $y \cdot a < \beta$. Пусть y_1 принадлежит первому из них. Тогда для функции двух комплексных переменных $z = (z_1, z_2) = (x+iy)$, определенной равенством $G(z) = \exp\{-i\rho(z \cdot a - i\beta)\}$, $\rho > 0$, имеем $|G(z)| = \exp\{\rho(y \cdot a - \beta)\}$, что равно 1 для $y \in l$, меньше 1 в полупространстве, не содержащем y_1, и равно числу $N > 1$, когда $y = y_1$. Это число N можно сделать сколь угодно большим, если выбрать ρ достаточно большим. Кроме того, $|G(z)| \leqslant N$, когда $z = x+iy$ удовлетворяет неравенству $(y_1 - y) \cdot a \geqslant 0$.

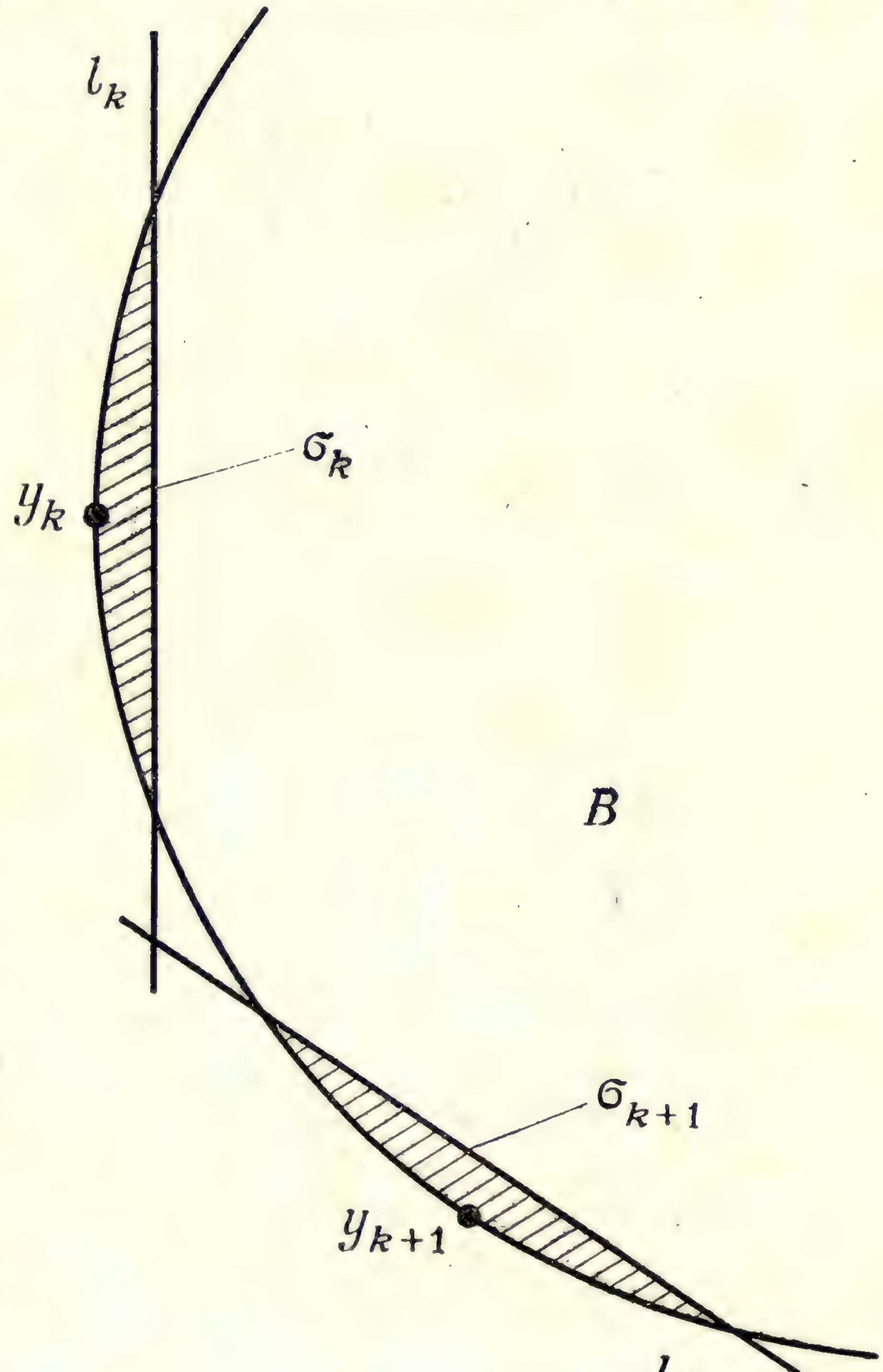

Рис. 2

Предположим теперь, что B — круг в E_2, имеющий точку 0 на границе и лежащий в верхней полуплоскости. Выберем последовательность $\{y_k\}$ точек на границе круга B, сходящуюся к 0, и обозначим через $\{\sigma_k\}$ соответствующую последовательность сегментов B, каждый из которых ограничен отрезком прямой l_k между точками пересечения ее с границей B по обеим сторонам от y_k и соответствующей дугой этой границы, содержащей y_k. Предположим еще, что прямые l_k выбраны так близко к точкам y_k, что сегменты σ_k попарно не пересекаются (рис. 2), и что прямые l_k параллельны касательным к B в точках y_k. Для каждого k можно построить функцию G_k описанного в предыдущем абзаце

типа со следующими свойствами:

(i) G_k *аналитична в* $\mathbf{C}_2$;

(ii) $|G_k(x+iy)|$ *зависит только от* y;

(iii) $|G_k(z)| \leqslant 1$ *при* $z \in T_B \setminus T_{\sigma_k}$;

(iv) $|G_k(x+iy_k)| = 1 + 2^{k+2} = N_k$ *и* $|G_k(z)| \leqslant N_k$ *при* $z \in$ $\in T_{\sigma_k}$.

Затем определим функцию F, положив

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} G_k(z).$$

Если $z \in T_B$, то z либо принадлежит в точности одной из трубчатых областей T_{σ_k}, скажем $T_{\sigma_{k_0}}$, либо не принадлежит ни одной из них. В первом случае, в силу (iii) и второй части (iv), имеем

$$|F(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{k_0-1} 2^{-k} + (2^{-k_0} + 4) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k} = 5,$$

в то время как во втором случае $|F(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$. В частности, отсюда следует, что $F \in H^{\infty}(T_B)$. В силу (ii) и (iv), найдутся точки $y_k' \in \sigma_k$, настолько близкие к y_k, что $|G_k(x+iy_k')| > N_k - 1$ для $k = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$|F(x+iy_k')| \geqslant 2^{-k} |G_k(x+iy_k')| - \sum_{j \neq k} 2^{-j} |G_k(x+iy_k')| >$$

$$> 2^{-k}(N_k - 1) - \sum_{j \neq k} 2^{-j} > 4 - 1 = 3.$$

Отсюда следует, что при приближении к граничной точке 0 по последовательности, лежащей вне всех сегментов σ_k, имеем $|F(x+$ $+iy)| \leqslant 1$ для всех точек y этой последовательности. С другой стороны, $\lim\limits_{k\to\infty} y_k' = 0$ и $|F(x+iy_k')| > 3$. В частности, отсюда следует, что поточечный предел

$$\lim_{y \in B, y \to 0} F(x+iy)$$

не существует для *всех* $x \in E_2$.

Чтобы дать пример функции из $H^2(T_B)$, не имеющей предела по L^2-норме при приближении к 0 произвольным образом внутри B, достаточно найти функцию $G \in H^2(T_{B'})$, где $\overline{B} \subset B'$, такую, что $G(x+i0) = G(x) \not\equiv 0$, и умножить ее на только что построенную функцию F. Тогда $\int\limits_{E_2} |F(x+iy)\,G(x+iy)|^2\,dx \geqslant 9 \int\limits_{E_2} |G(x+iy)|^2 dx$,

если $y = y'_k$, $k = 1, \ldots$, в то время как

$$\int_{E_n} |F(x+iy)\,G(x+iy)|^2\,dx \leqslant \int_{E_n} |G(x+iy)|^2\,dx,$$

если $y \in B$ не принадлежит ни одному из сегментов σ_k. Таким образом, предел

$$\lim_{y \in B, y \to 0} F(x+iy)\,G(x+iy)$$

по L^2-норме не может существовать. Примером такой функции является $G(z) = 1/(z_1+i)(z_2+i)$ для $z = (z_1, z_2) = (x_1+iy_1, x_2+iy_2)$, $y_1 > -1/2$, $y_2 > -1/2$. Очевидно, что она определена и аналитична в трубчатой области $T_{B'}$, $\overline{B} \subset B'$, и при этом

$$\int_{E_2} |G(x+iy)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x_1+i(y_1+1)|^2\,|x_2+i(y_2+1)|^2}\,dx_1dx_2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+{}^1/_4}\,dx\right\}^2 < \infty.$$

Итак, $G \in H^2(T_{B'})$.

Для некоторых частных видов оснований B, однако, L^2-пределы при приближении к граничной точке существуют. Определим *открытый полиэдр* в E_n как внутренность выпуклой оболочки конечного множества точек E_n. Следующий результат утверждает, в частности, что, когда B — открытый полиэдр, пределы (2.7) существуют в L^2-смысле во всех граничных точках B.

Следствие 2.9. *Пусть P — открытый полиэдр в E_n и $F \in H^2(T_P)$. Продолжим F на множество $T_{\overline{P}}$ равенством* (2.8); *тогда отображение $y \to F(x+iy)$ множества $\overline{P}$ в пространство $L^2(E_n)$ непрерывно.*

Доказательство. В силу теоремы Планшереля достаточно доказать, что отображение $y \to f(t)\,e^{-2\pi y\cdot t}$ непрерывно. Пусть $\overline{P}$ — выпуклая оболочка конечного множества $\{y_1, \ldots, y_k\} \subset E_n$. Пусть

$$G(t) = \sum_{j=1}^{k} e^{-4\pi y_j\cdot t}\,|f(t)|^2.$$

Функция G, очевидно, интегрируема в E_n. Кроме того, она мажорирует функцию $e^{-4\pi y\cdot t}|f(t)|^2$ в каждой точке $y \in \overline{P}$. Действительно, если $y \in \overline{P}$, то $y = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_k y_k$, где α_j — неотрицательные

числа, сумма которых равна 1; но тогда

$$e^{-4\pi y\cdot t} = \exp\left\{-4\pi \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (y_j \cdot t)\right\} = \prod_{j=1}^{k} (e^{-4\pi y_j\cdot t})^{\alpha_j} \leqslant \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e^{-4\pi y_j\cdot t}.$$

Теперь для y, $\bar{y} \in \bar{P}$, $y \to \bar{y}$ имеем

$$|f(t)\, e^{-2\pi y\cdot t} - f(t)\, e^{-2\pi \bar{y}\cdot t}|^2 \to 0;$$

эта сходимость мажорируется функцией $4G(t)$, и следствие вытекает из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Следствие 2.10. *Пусть B — открытое выпуклое множество в E_n и y_0 — точка на его границе. Пусть $F \in H^2(T_B)$ и P — открытый полиэдр, содержащийся в B и имеющий точку y_0 в качестве граничной. Тогда $F(x+iy)$ сходится к $F(x+iy_0)$ по L^2-норме, если $y \to y_0$ в P, где $F(x+iy_0)$ — функция, определяемая равенством* (2.8).

Так как $H^2(T_B) \subset H^2(T_P)$, то это есть просто частный случай следствия 2.9.

Нетрудно видеть, что приведенный выше контрпример можно модифицировать таким образом, чтобы включить все граничные точки, не являющиеся *граничными точками углового типа*, т. е. точками, лежащими на пересечении двух отрезков прямой, составляющих часть границы ∂B множества B (при этом допускается, что эти два отрезка лежат на одной прямой; в этом случае точка углового типа будет внутренней точкой отрезка прямой, принадлежащего ∂B). Если y_0 не есть граничная точка углового типа, то в силу выпуклости B найдется последовательность $\{y_j\}$ точек из ∂B, сходящаяся к y_0 и такая, что открытые отрезки $\overline{y_j y_0}$ лежат внутри B. Это позволяет найти последовательность $\{\sigma_k\}$ взаимно не пересекающихся сегментов и соответствующих аналитических функций $\{G_k\}$, из которых можно построить функцию F, как это было сделано в контрпримере. Этот факт вместе со следствием 2.9 дает следующее необходимое и достаточное условие существования предела (2.7) в L^2-смысле, когда размерность равна 2.

Теорема 2.11. *Пусть B — открытое выпуклое множество в E_2 и $y_0 \in \partial B$. Предел*

$$\lim_{y \to y_0, y \in B} F(x+iy) = F(x+iy_0)$$

существует в L^2-смысле для всех $F \in H^2(T_B)$ тогда и только тогда, когда y_0 — граничная точка множества B углового типа.

В общем случае, если пределы (2.7) существуют (в L^2-смысле, почти всюду, в L^p, ...), мы будем называть их *несуженными пределами* (в L^2, почти всюду, в L^p, ...). Если же такие пределы существу-

ют, когда y сходится к y_0 внутри некоторого полиэдра в B, имеющего точку y_0 в качестве граничной, мы скажем, что в точке y_0 существуют *суженные пределы* (в L^2, почти всюду, в L^p, ...). В этой терминологии следствие 2.10 утверждает, что суженные пределы существуют в L^2-смысле во всех граничных точках для всех H^2-функций; теорема 2.11, с другой стороны, дает необходимое и достаточное условие существования несуженных пределов в L^2-смысле, когда $n = 2$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2.3. Начнем с леммы, утверждающей, в частности, что если $F \in H^2(T_B)$, то F равномерно ограничена в «строго меньших» трубчатых областях. Мы сформулируем и докажем эту лемму для более широкого класса пространств $H^p(T_B)$ (см. (1.5)), так как этот более общий результат нам понадобится позднее. Итак,

Лемма 2.12. *Пусть $F \in H^p(T_B)$, $p > 0$, а множество $B_0 \subset B$ таково, что $d(B_0, {}^cB) = \inf\{|y_1 - y_2|;\ y_1 \in B_0,\ y_2 \notin B\} \geqslant \varepsilon > 0$; тогда существует постоянная $C = C(\varepsilon, n)$, зависящая от ε и n, но не от F и такая, что*

$$\sup_{z \in T_{B_0}} |F(z)| \leqslant C \|F\|_p.$$

Доказательство. Пусть $z_0 = x_0 + iy_0 \in T_{B_0}$ и $S_\varepsilon = \{z \in \mathbf{C}_n;\ |z - z_0| < \varepsilon\}$. Введем обозначение $\Sigma_\varepsilon = \{y \in E_n;\ |y - y_0| < \varepsilon\}$; тогда $S_\varepsilon \subset T_{\Sigma_\varepsilon} \subset T_B$. Отсюда, вспоминая, что Ω_m — объем единичного шара в E_m, $m \geqslant 1$, получим

$$\left(\int_{S_\varepsilon} |F(z)|^p\,dx\,dy\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{T_{\Sigma_\varepsilon}} |F(z)|^p\,dx\,dy\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_{\Sigma_\varepsilon} \left\{\int_{E_n} |F(x+iy)|^p\,dx\right\} dy\right)^{1/p} \leqslant \|F\|_p (\Omega_n \varepsilon^n)^{1/p}.$$

С другой стороны, поскольку $|F|^p$ субгармонична как функция $2n$ переменных (см. пример (3) в § 4 и теорему 4.4′ в гл. II),

$$|F(z_0)|^p \leqslant \Omega_{2n}^{-1} \varepsilon^{-2n} \left(\int_{S_\varepsilon} |F(z)|^p\,dx\,dy\right).$$

Объединяя эти неравенства, получим $|F(z_0)| \leqslant C\|F\|_p$, где $C = (\Omega_n/\Omega_{2n})^{1/p}\, \varepsilon^{-n/p}$.

Для того чтобы доказать теорему 2.3, нужно показать, что если $F \in H^2(T_B)$, то существует функция f, удовлетворяющая оценке (2.1) и такая, что справедливо представление (2.2) для F (обратное уже было установлено).

Пусть f_y — преобразование Фурье функции $F(x+iy)$, рассматриваемой как функция переменной x; $y \in B$. Очевидно, достаточно

показать, что если $y, y' \in B$, то $e^{2\pi y'\cdot t} f_{y'}(t) = e^{2\pi y\cdot t} f_y(t)$ для почти всех t. Действительно, тогда функция $f(t) = e^{2\pi y\cdot t} f_y(t)$ почти всюду определена независимо от выбора $y \in B$, причем f удовлетворяет оценке (2.1) с $A = \| F \|_p$, и должно выполняться представление (2.2) (см. рассуждения перед формулировкой теоремы 2.3). Очевидно, достаточно показать это, когда y, y' принадлежат кубу Q, замыкание которого лежит в B и ребра параллельны осям координат. Предположим, далее, на некоторое время, что $|F(x+iy)|$ как функция x мажорируется равномерно по $y \in Q$ функцией, убывающей достаточно быстро на бесконечности. Наконец, заметим, что достаточно рассмотреть случай, когда две точки $y, y' \in Q$ имеют вид $y = (\eta_1, y_2, \ldots, y_n)$, $y' = (\eta_1', y_2, \ldots, y_n)$; общий случай сводится к этому повторением рассуждений. Предположим, что $\eta_1' \geqslant \eta_1$; тогда, в силу интегральной теоремы Коши, имеем

$$0 = \int_{-R}^{R} e^{-2\pi i(x_1+i\eta_1)t_1} F(x_1 + i\eta_1, \ldots, x_n + iy_n)\, dx_1 +$$

$$+ \int_{\eta_1}^{\eta_1'} e^{-2\pi i(R+i\eta)t_1} F(R + i\eta, \ldots)\, d\eta +$$

$$+ \int_{R}^{-R} e^{-2\pi i(x_1+i\eta_1')t_1} F(x_1 + i\eta_1', \ldots)\, dx_1 +$$

$$+ \int_{\eta_1'}^{\eta_1} e^{-2\pi i(-R+i\eta)t_1} F(-R + i\eta, \ldots)\, d\eta.$$

В силу наших предположений, 2-й и 4-й члены стремятся к 0 при $R \to \infty$. Таким образом, после интегрирования по $x_2, \ldots, x_n$ получим

$$e^{2\pi y\cdot t} f_y(t) = \int_{E_n} e^{-2\pi i(x+iy)\cdot t} F(x+iy)\, dx =$$

$$= \int_{E_n} e^{-2\pi i(x+iy')\cdot t} F(x+iy')\, dx = e^{2\pi y'\cdot t} f_{y'}(t).$$

Покажем теперь, как общий случай $F \in H^2(T_B)$ вытекает из рассмотренного. В силу леммы 2.12, F ограничена на T_Q, скажем $|F(z)| \leqslant M$ для $z \in T_Q$. Тогда, положив

$$F^{(\varepsilon)}(z) = e^{\left\{-\varepsilon \sum\limits_{j=1}^{n} z_j^2\right\}} F(z)$$

для $z=(z_1, \ldots, z_n) \in T_Q$ и $\varepsilon > 0$, получим

$$|F^{(\varepsilon)}(x+iy)| \leqslant M e^{\varepsilon n a^2} e^{-\varepsilon |x|^2}$$

для $y \in Q$, где $a = \max\limits_{y \in Q} \{|y_1|, \ldots, |y_n|\}$. Применяя приведенные выше рассуждения к преобразованию Фурье $f_y^{(\varepsilon)}$ функции $F^{(\varepsilon)}(x+iy)$, получим

$$e^{2\pi y \cdot t} f_y^{(\varepsilon)}(t) = e^{2\pi y' \cdot t} f_{y'}^{(\varepsilon)}(t) \tag{2.13}$$

для $y, y' \in Q$. Но $\int\limits_{E_n} |F^{(\varepsilon)}(x+iy) - F(x+iy)|^2 dx \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, так что равенство (2.13) сохраняется в пределе при $\varepsilon \to 0$, т. е., применяя теорему Планшереля, получим сходимость $f_y^{(\varepsilon)} \to f_y$ и $f_{y'}^{(\varepsilon)} \to f_{y'}$ в L^2-смысле. В частности,

$$e^{2\pi y \cdot t} f_y(t) = e^{2\pi y' \cdot t} f_{y'}(t)$$

для почти всех t. Это доказывает теорему.

3. Трубчатые области над конусами

Естественно ожидать, что, если ограничиться основаниями определенного вида, теория пространств H^2 (или в общем случае пространств H^p) станет богаче. Это, в частности, верно, если рассматривать трубчатые области, основания которых — *открытые конусы* [1]), т. е. непустые множества $\Gamma \subset E_n$, такие, что (i) $0 \notin \Gamma$ и (ii) $\alpha x + \beta y \in \Gamma$ для любых $x, y \in \Gamma$ и $\alpha, \beta > 0$. Отметим, в частности, что Γ — выпуклое множество.

Замыкание открытого конуса является *замкнутым конусом*. Ясно, что если Γ — открытый конус, то множество $\Gamma^* = \{x \in E_n;\ x \cdot t \geqslant 0,\ t \in \Gamma\}$ замкнуто. Более того, если Γ^* имеет непустую внутренность, то это замкнутый конус; в этом случае будем говорить, что Γ — *острый конус*. Конус Γ^* называется *сопряженным* к конусу Γ. При $n=1$ открытые конусы — это полупрямые $\{x \in E_1;\ x > 0\}$ и $\{x \in E_1,\ x < 0\}$. При $n=2$ открытые конусы — это угловые области, заключенные между двумя лучами, выходящими из начала координат, угол между которыми меньше или равен π. Такой конус будет острым тогда и только тогда, когда этот угол строго меньше π.

В случае когда основание есть конус, имеет место следующая теорема о представлении H^2-функции (более точный результат, чем теорема 2.3):

---

[1]) В литературе на русском языке такие области иногда называют «трубчатыми конусами». —*Прим. ред.*

Теорема 3.1. *Пусть* Γ — *открытый конус. Тогда* $F \in H^2(T_\Gamma)$ *в том и только в том случае, когда*

$$F(z) = \int\limits_{\Gamma^*} e^{2\pi i z \cdot t} f(t)\, dt, \tag{3.2}$$

где f — *измеримая функция, такая, что*

$$\int\limits_{\Gamma^*} |f(t)|^2\, dt < \infty.$$

При этом

$$\| F \|_2 = \left(\int\limits_{\Gamma^*} |f(t)|^2\, dt \right)^{1/2}.$$

Следовательно, соответствие $F \leftrightarrow f$ *есть унитарное линейное отображение* $H^2(T_\Gamma)$ *на* $L^2(\Gamma^*)$. *В частности,* $H^2(T_\Gamma)$ *содержит функции, не равные тождественно* 0, *тогда и только тогда, когда* Γ — *острый конус.*

Доказательство. Так как $y \cdot t \geqslant 0$ для всех $y \in \Gamma$ и $t \in \Gamma^*$, то, в силу теоремы 2.3, каждая функция F, имеющая представление (3.2) с $f \in L^2(\Gamma^*)$, принадлежит пространству $H^2(T_\Gamma)$.

Обратно, пусть $F \in H^2(T_\Gamma)$. Тогда, в силу теорем 2.3 и 2.5,

$$F(z) = \int\limits_{E_n} e^{2\pi i z \cdot t} f(t)\, dt,$$

причем

$$\| F \|_2^2 = \sup_{y \in \Gamma} \int\limits_{E_n} e^{-4\pi y \cdot t} |f(t)|^2\, dt.$$

Нужно доказать, что f равна 0 почти всюду вне Γ^*. Пусть $t_0 \notin \Gamma^*$; тогда найдется такая точка $y_0 \in \Gamma$, что $y_0 \cdot t_0 < 0$. Более того, найдутся окрестность N точки t_0 и число $\delta > 0$, такие, что $N = N(t_0) \subset E_n \setminus \Gamma^*$ и $y_0 \cdot t < -\delta < 0$ при $t \in N$. Следовательно, $(ky_0) \cdot t < -k\delta$ при всех $t \in N$ и $k > 0$. Так как $ky_0 \in \Gamma$, то

$$\int\limits_{N} e^{-4\pi k y_0 \cdot t} |f(t)|^2\, dt \leqslant \int\limits_{E_n} e^{-4\pi k y_0 \cdot t} |f(t)|^2\, dt \leqslant \| F \|_2^2 < \infty.$$

Но отсюда следует, что

$$\int\limits_{N} e^{4\pi k \delta} |f(t)|^2\, dt \leqslant \| F \|_2^2 < \infty$$

при всех $k > 0$, а это, очевидно, может быть справедливым лишь для $f(t) = 0$ почти всюду в $N(t_0)$. Таким образом, $f(t) = 0$ почти всюду вне Γ^*[1]. Остальные утверждения теоремы 3.1 теперь очевидны.

---

[1] Заметим, что эта часть доказательства очень похожа на доказательство следствия 2.6.

В классическом случае, когда F принадлежит пространству H^2, связанному с верхней полуплоскостью (т. е. когда основание трубчатой области есть конус, состоящий из положительных чисел), легко выводится интегральное представление Коши

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{E_1}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \tag{3.3}$$

выражающее функцию F через ее граничные значения. Покажем, что это представление обобщается на случай, когда основание есть конус $\Gamma\subset E_n$; кроме того, это представление зависит только от граничных значений, принимаемых, когда $y\in\Gamma$ стремится к вершине конуса Γ (т. е. к точке 0 в E_n). То, что эти граничные значения существуют в L^2-смысле, есть простое следствие теоремы 3.1:

Следствие 3.4. *Пусть Γ — открытый конус в E_n и $F(x+iy)\in H^2(T_\Gamma)$; тогда существует функция $F(x)$, определенная на E_n и такая, что $F(x+iy)\to F(x)$ по L^2-норме, когда $y\in\Gamma$ стремится к 0.*

Доказательство. Используя обозначения теоремы 3.1, определим функцию $F(x)$ как обратное преобразование Фурье функции f (которую можно считать определенной в E_n и равной 0 вне Γ^*), так что формально

$$F(x)=\int_{\Gamma^*}e^{2\pi i x\cdot t}f(t)\,dt.$$

Но из равенства (3.2) следует, что $F(x+iy)$ есть обратное преобразование Фурье функции $e^{-2\pi y\cdot t}f(t)$; так как последняя функция сходится к $f(t)$ по L^2-норме, когда $y\to 0$, то утверждение леммы следует из теоремы Планшереля.

Описанное выше обобщение представления (3.3) будет получено при помощи следующего ядра, связанного с трубчатой областью. Пусть $z=x+iy\in T_\Gamma$; положим

$$K(z)=\int_{\Gamma^*}e^{2\pi i z\cdot t}dt=\int_{\Gamma^*}e^{2\pi i x\cdot t}e^{-2\pi y\cdot t}dt\ ^{1)}.$$

Таким образом мы получаем непрерывную функцию K, определенную в T_Γ и называемую *ядром Коши, связанным с трубчатой*

---

[1]) При $n=1$, когда конус Γ — множество положительных чисел, $K(z)=-1/2\pi iz$ и представление (3.3) имеет вид $F(z)=\int_{E_1}K(z-\xi)F(\xi)d\xi$. Теорема 3.6 утверждает, что такая формула справедлива для функций, голоморфных в произвольной трубчатой области T_Γ с коническим основанием.

областью T_Γ [1]. Как функция переменной $x = \operatorname{Re} z$ функция K принадлежит пространству $L^2(E_n)$; действительно, из теоремы Планшереля следует, что

$$\int_{E_n} |K(x+iy)|^2\,dx = \int_{\Gamma^*} e^{-4\pi y\cdot t}\,dt = K(2iy) \tag{3.5}$$

для всех $y \in \Gamma$ (сейчас будет показано, что $K(2iy)$ конечна).

Теорема 3.6. *Пусть* $F \in H^2(T_\Gamma)$; *тогда*

$$F(z) = \int_{E_n} K(z-\xi)\,F(\xi)\,d\xi$$

при всех $z \in T_\Gamma$, *где* $F(\xi) = \lim\limits_{\eta\to 0,\,\eta\in\Gamma} F(\xi+i\eta)$ — *предельная функция, существующая в силу следствия* 3.4.

Доказательство. В силу теоремы 3.1 и следствия 3.4 имеем

$$F(z) = F(x+iy) = \int_{\Gamma^*} e^{2\pi i z\cdot t} f(t)\,dt,$$

где f — преобразование Фурье функции $F(\xi) = \lim\limits_{\eta\to 0,\eta\in\Gamma} F(\xi+i\eta)$, т. е. f — предел по L^2-норме последовательности функций

$$f_k(t) = \int_{|\xi|\leqslant k} F(\xi)\,e^{-2\pi i t\cdot\xi}\,d\xi,$$

$k = 1, 2, \ldots$. Тогда, используя теорему Фубини и тот факт, что $K(x-\xi+iy)$ как функция переменной ξ принадлежит $L^2(E_n)$ (см. (3.5)), получим

$$F(z) = \lim_{k\to\infty}\int_{\Gamma^*} e^{2\pi i z\cdot t} f_k(t)\,dt =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\int_{\Gamma^*} e^{2\pi i z\cdot t}\left\{\int_{|\xi|\leqslant k} F(\xi)\,e^{-2\pi i t\cdot\xi}\,d\xi\right\}dt =$$

[1] Полезная формула для ядра Коши получена В. С. Владимировым [2]. Эта формула имеет вид

$$K(z) = \frac{i^n (n-1)!}{(2\pi)^n}\int_{\text{пр}\,\Gamma^*}\frac{dt'}{(z\cdot t')^n},$$

где прΓ^* — пересечение конуса Γ^* с поверхностью единичной сферы. — *Прим. перев.*

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{|\xi|\leqslant k} F(\xi) \left\{ \int\limits_{\Gamma^*} e^{2\pi i (z-\xi)\cdot t} dt \right\} d\xi =$$

$$= \int\limits_{E_n} F(\xi) K(z-\xi)\, d\xi,$$

и теорема доказана.

В классическом одномерном случае ядро Пуассона

$$P(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2 + y^2}$$

можно выразить в терминах ядра Коши, связанного с верхней полуплоскостью, следующим простым способом. Пусть $z = x+iy$, $y > 0$; тогда

$$P(x, y) = |K(z)|^2/K(2iy).$$

Естественно обобщить это определение на все случаи, когда определено ядро Коши. Пусть T_Γ — трубчатая область с основанием Γ, где Γ — острый конус, а K — соответствующее ядро Коши; определим *ядро Пуассона, связанное с* T_Γ, равенством

$$\mathcal{P}(x, y) = |K(x+iy)|^2/K(2iy)$$

при всех $z = (x+iy) \in T_\Gamma$.

Было показано, что $K(x+iy)$ как функция переменной x принадлежит пространству $L^2(E_n)$; следовательно, $\mathcal{P}(\cdot, y)$ принадлежит пространству $L^1(E_n)$ при каждом $y \in \Gamma$. Кроме того, нетрудно доказать, что $\mathcal{P}(\cdot, y)$ принадлежит $L^\infty(E_n)$. Для этого, очевидно, достаточно установить, что $K(x+iy)$ ограничено по x при каждом y из Γ. Но

$$|K(x+iy)| = \left| \int\limits_{\Gamma^*} e^{2\pi i (x+iy)\cdot t} dt \right| \leqslant \int\limits_{\Gamma^*} e^{-2\pi y\cdot t} dt = K(iy).$$

Таким образом, достаточно показать, что $K(iy)$ конечно, когда $y \in \Gamma$. Для того чтобы проделать это, сначала отметим, что если $y \in \Gamma$, то найдется такое $\delta = \delta_y > 0$, что $\delta\,|t| \leqslant y \cdot t$ для всех $t \in \Gamma^*$. Достаточно проверить это лишь для таких $t \in \Gamma^*$, что $|t| = 1$. Из определения Γ^* следует, что $0 \leqslant y \cdot t$. С другой стороны, поскольку конус Γ открытый, равенство невозможно, так как тогда найдется достаточно малое $u \in E_n$, такое, что $y + u \in \Gamma$ и в то же время $(y+u) \cdot t = u \cdot t < 0$ в противоречии с тем, что $t \in \Gamma^*$. Так как пересечение конуса Γ^* с единичной сферой Σ в E_n компактно, то существование $\delta_y > 0$ теперь следует из того, что $0 < y \cdot t$ для всех $t \in \Gamma^* \cap \Sigma$. Таким образом,

$$\int\limits_{\Gamma^*} e^{-2\pi y\cdot t} dt \leqslant \int\limits_{\Gamma^*} e^{2\pi\delta|t|} dt < \infty$$

при $y \in \Gamma$. Так как $L^q(E_n) \supset L^1(E_n) \cap L^\infty(E_n)$ при $1 \leqslant q \leqslant \infty$ [1], то отсюда следует утверждение:

3.7. $\mathcal{P}(\cdot, y) \in L^q(E_n)$ *при всех* $y \in \Gamma$ *и* $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

Следовательно, если $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то функция

$$u(x+iy) = \int_{E_n} f(x-t)\,\mathcal{P}(t, y)\,dt$$

определена при всех $z = x + iy \in T_\Gamma$. Как и в случае с интегралами Пуассона, введенными в гл. I, можно показать, что $u(x+iy)$ сходится к $f(x)$ по L^p-норме, т. е.

$$\lim_{y\to 0, y\in\Gamma} \int_{E_n} |u(x+iy) - f(x)|^p\,dx = 0. \tag{3.8}$$

Это непосредственно следует из того, что ядро $\mathcal{P}$ является приближением единицы (см. примечание в конце доказательства теоремы 2.1 гл. II и последнюю часть доказательства теоремы 5.6 ниже). Под этим имеются в виду три свойства, которыми обладает ядро $\mathcal{P}$:

(i) $\mathcal{P}(x, y) \geqslant 0$;

(ii) $\int_{E_n} \mathcal{P}(x, y)\,dx = 1$ *для всех* $y \in \Gamma$;

(iii) *если* $\delta > 0$, *то* $\int_{|x|>\delta} \mathcal{P}(x, y)\,dx \to 0$ *при* $y \to 0$, $y \in \Gamma$.

Свойство (i) очевидно. Второе свойство следует из (3.5) после деления обеих частей этого равенства на $K(2iy)$. Для того чтобы доказать свойство (iii), достаточно найти функцию ψ со следующими свойствами:

(a) ψ непрерывна на E_n;

(b) $\lim_{y\in\Gamma, y\to 0} \int_{E_n} \mathcal{P}(x, y)\,\psi(x)\,dx = 1$;

(c) $|\psi(x)| < 1$ при $x \neq 0$ и $\psi(x) \to 0$, когда $|x| \to \infty$.

Действительно, если такая функция существует, то, в силу (b), имеет место равенство

$$1 = \lim_{y\in\Gamma, y\to 0} \left\{ \int_{|x|\leqslant\delta} \psi(x)\,\mathcal{P}(x, y)\,dx + \int_{|x|>\delta} \psi(x)\,\mathcal{P}(x, y)\,dx \right\}.$$

---

[1] Если $f \in L^1 \cap L^\infty$ и $1 < q < \infty$, то $\int |f|^q = \int |f|^{q-1}|f| \leqslant \|f\|_\infty^{q-1}\|f\|_1 < \infty$.

Из (a) и (c) следует, что существует такое $\varepsilon > 0$, что $|\psi(x)| \leqslant \leqslant 1-\varepsilon$ при $|x| > \delta$. Тогда (используя (i) и (ii)) получаем

$$1 \leqslant \lim_{y\in\Gamma, y\to 0}\left\{\int_{|x|\leqslant\delta} \mathcal{P}(x, y)\,dx + (1-\varepsilon)\int_{|x|>\delta} \mathcal{P}(x, y)\,dx\right\} =$$

$$= \lim_{y\in\Gamma, y\to 0}\left\{\int_{E_n} \mathcal{P}(x, y)\,dx - \varepsilon\int_{|x|>\delta} \mathcal{P}(x, y)\,dx\right\} =$$

$$= \lim_{y\in\Gamma, y\to 0}\left\{1 - \varepsilon\int_{|x|>\delta} \mathcal{P}(x, y)\,dx\right\}.$$

Но отсюда, очевидно, следует свойство (iii).

Существование такой функции ψ легко вытекает из следующей теоремы о представлении:

Теорема 3.9. *Пусть $F \in H^2(T_\Gamma)$; тогда*

$$F(z) = \int_{E_n} \mathcal{P}(x-t, y)\,F(t)\,dt$$

при всех $z = x+iy$ из T_Γ.

Доказательство. Пусть $w = u + iv \in T_\Gamma$. Тогда для $z \in T_\Gamma$ имеем

$$|K(z+w)| = \left|\int_{\Gamma^*} e^{2\pi i(x+u)\cdot t} e^{-2\pi(y+v)\cdot t}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Gamma^*} e^{-2\pi v\cdot t}\,dt = M_v < \infty.$$

Таким образом, $F(z)\,K(z+w)$ как функция переменной z принадлежит пространству $H^2(T_\Gamma)$ и имеет норму, не превосходящую $\|F\|_2\,M_v$. Тогда, применяя к этой функции теорему 3.6, получим

$$F(z)\,K(z+w) = \int_{E_n} K(z-t)\,F(t)\,K(t+w)\,dt \tag{3.10}$$

при всех $z \in T_\Gamma$. Положим теперь $w = -x + iy$; тогда $K(z-t)\times \times K(t+w) = |K(z-t)|^2$ и $K(z+w) = K(2iy)$, при этом равенство (3.10) перейдет в равенство

$$F(z) = \int_{E_n} F(t)\,\{|K(z-t)|^2/K(2iy)\}\,dt = \int_{E_n} F(t)\,\mathcal{P}(x-t, y)\,dt.$$

Это и есть искомый результат.

Перейдем теперь к построению функции ψ. Выберем непрерывную функцию $\varphi \geqslant 0$ с компактным носителем, содержащимся в Γ^*, такую, что $\int_{E_n} \varphi(t)\,dt = 1$ (это можно сделать, так как конус Γ

острый). Тогда функция

$$\psi(x) = \int_{E_n} e^{2\pi i x \cdot t}\varphi(t)\,dt = \int_{\Gamma^*} e^{2\pi i x \cdot t}\varphi(t)\,dt$$

обладает свойствами (a), (b) и (c). Поскольку $\varphi \in L^1(E_n)$, свойство (a), очевидно, имеет место (см. теорему 1.1 (b) гл. I). Тот факт, что $\psi(x) \to 0$, когда $|x| \to \infty$, есть частный случай теоремы Римана — Лебега. Если $|\psi(x)| = 1$, скажем $\psi(x) = e^{2\pi i\theta}$, то

$$1 = \int_{E_n} e^{2\pi i[(x\cdot t)-\theta]}\varphi(t)\,dt = \int_{E_n} \varphi(t)\cos 2\pi\,[(x\cdot t)-\theta]\,dt$$

(мнимая часть первого интеграла обращается в 0, так как 1 — вещественное число). Если $x \neq 0$, то $\cos 2\pi\,[(x\cdot t)-\theta]$ как функция переменной t должна быть строго меньше 1 на подмножестве носителя функции φ, имеющем положительную меру. Отсюда и из предположения, что φ неотрицательна и

$$\int_{E_n} \varphi(t)\,dt = 1,$$

следует, что $|\psi(x)| < 1$ при $x \neq 0$. Для того чтобы показать, что выполняется свойство (b), рассмотрим функцию

$$F(z) = \int_{\Gamma^*} e^{2\pi i z\cdot t}\varphi(t)\,dt$$

при $z \in T_\Gamma$. В силу теоремы 3.1, F принадлежит пространству $H^2(T_\Gamma)$, и ясно, что

$$F(x) = \lim_{y\in\Gamma, y\to 0} F(x+iy) = \int_{\Gamma^*} e^{2\pi i x\cdot t}\varphi(t)\,dt = \psi(x)$$

по L^2-норме; кроме того, в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости,

$$F(0) = \lim_{y\in\Gamma, y\to 0} F(0+iy) = \psi(0) = 1. \tag{3.11}$$

Применяя к функции F теорему 3.9, получим

$$F(x+iy) = \int_{E_n} \mathcal{P}(x-t, y)\,F(t)\,dt = \int_{E_n} \mathcal{P}(x-t, y)\,\psi(t)\,dt. \tag{3.12}$$

Так как $\mathcal{P}(-t, y) = \mathcal{P}(t, y)$, то из (3.12) (при $x = 0$) и (3.11) следует свойство (b).

4. Теорема Пэли — Винера

Этот параграф посвящен применению теории пространств H^2. Будет показано, что классическая теорема Пэли — Винера обобщается на n-мерный случай, причем в доказательстве будут использованы некоторые результаты, полученные в этой главе. Начнем с одномерного случая.

Пусть F — целая функция, определенная в комплексной плоскости $\mathbf{C}_1$. Будем говорить, что F — *функция экспоненциального типа* $\sigma > 0$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная A_ε, такая, что

$$|F(z)| \leqslant A_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}$$

при всех $z \in \mathbf{C}_1$. Пример такой функции можно получить следующим образом. Пусть $f \in L^2(-\tau, \tau)$; определим целую функцию F равенством

$$F(z) = \int_{-\tau}^{\tau} f(t)\, e^{2\pi i z t} dt$$

при $z \in \mathbf{C}_1$. Тогда

$$|F(z)| = |F(x+iy)| \leqslant \sqrt{2\tau} \left(\int_{-\tau}^{\tau} |f(t)|^2\, dt \right)^{1/2} e^{2\pi\tau|y|} \leqslant A e^{2\pi\tau|z|}.$$

Отсюда следует, что F — функция экспоненциального типа $\sigma = 2\pi\tau$. Теорема Пэли — Винера утверждает, что обратное также верно, если предположить, что сужение функции F на вещественную ось принадлежит пространству $L^2(-\infty, \infty)$. Точнее, справедлива

Теорема 4.1. *Пусть* $F \in L^2(-\infty, \infty)$. *Функция* F *является преобразованием Фурье некоторой функции, равной* 0 *вне отрезка* $[-\sigma/2\pi, \sigma/2\pi] = [-\tau, \tau]$, *тогда и только тогда, когда* F — *сужение на вещественную ось целой функции экспоненциального типа* σ.

Часть «только тогда» уже доказана [1]. Часть «тогда» будет доказана с помощью следующего результата типа Фрагмена — Линделёфа (ср. с п. 5.2 в гл. II):

Лемма 4.2. *Пусть* S — *область в* $\mathbf{C}_1$, *ограниченная двумя лучами, выходящими из начала под углом* π/α. *Пусть* f — *аналитическая на* $\overline{S}$ *функция, такая, что* $|f(z)| \leqslant A \exp\{|z|^\beta\}$, $0 \leqslant \beta < \alpha$, $z \in S$. *Тогда если* $|f(z)| \leqslant M$ *на граничных лучах, то* $|f(z)| \leqslant M$ *при всех* $z \in \overline{S}$.

[1] В соответствии с обозначениями, введенными в первой главе, было показано, что если F — обратное преобразование Фурье функции f, равной 0 вне отрезка $[-\tau, \tau]$, то F есть сужение на вещественную ось функции экспоненциального типа σ. Это, очевидно, эквивалентно тому, что F — преобразование Фурье функции g, определяемой равенством $g(t) = f(-t)$.

Доказательство. Повернув в случае необходимости оси координат, можно считать, что граничные лучи образуют углы $\pi/2\alpha$ и $-\pi/2\alpha$ с вещественной осью. Пусть $F(z) = f(z)\exp\{-\varepsilon z^\gamma\}$, где $\beta < \gamma < \alpha$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $|F(z)| \leqslant |f(z)| \leqslant M$ на двух граничных лучах. Кроме того, на дуге $R = |z| = |re^{i\theta}|$, $-(\pi/2\alpha) \leqslant \theta \leqslant \leqslant \pi/2\alpha$, имеем $|F(z)| \leqslant A\exp\{R^\beta - \varepsilon R^\gamma \cos(\gamma\pi/2\alpha)\}$. Но последнее выражение стремится к 0 при $R \to \infty$. Таким образом, $|F(z)| \leqslant M$ на этой дуге, если только R достаточно велико. В силу принципа максимума, отсюда следует, что $|F(z)| \leqslant M$ для всех $z \in \overline{S}$, таких, что $|z| \leqslant R$. Поскольку R можно выбрать сколь угодно большим, это означает, что $|F(z)| \leqslant M$ для всех $z \in \overline{S}$, так что $|f(z)| \leqslant \leqslant M\exp\{\varepsilon r^\gamma \cos\gamma\theta\}$ для всех $z = re^{i\theta} \in \overline{S}$. Устремляя $\varepsilon \to 0$, получим искомый результат.

Лемма 4.3. *Пусть F — функция экспоненциального типа σ и $|F(x)| \leqslant 1$ при вещественных x; тогда $|F(x+iy)| \leqslant \exp\{\sigma|y|\}$ при всех комплексных $z = x + iy$.*

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $F_\varepsilon(z) = F(z)\, e^{i(\sigma+\varepsilon)z}$. Так как F — функция экспоненциального типа σ, то

$$|F_\varepsilon(iy)| = |F(iy)|\, e^{-(\sigma+\varepsilon)y} \leqslant A_\varepsilon$$

для всех неотрицательных y. Кроме того, $|F_\varepsilon(x)| \leqslant 1$ для всех вещественных x. Отсюда следует ограниченность F на положительных полуосях x и y. Далее, заведомо существует постоянная B, такая, что

$$|F_\varepsilon(z)| \leqslant A_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)(|z|-y)} \leqslant A_\varepsilon e^{2(\sigma+\varepsilon)|z|} \leqslant Be^{|z|^{3/2}}.$$

Следовательно, можно применить лемму 4.2 с $\beta = 3/2 < 2 = \alpha$. При этом получим

$$|F_\varepsilon(z)| \leqslant \max\{A_\varepsilon, 1\} = A$$

при всех $z = x + iy$, таких, что $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Повторив эти рассуждения для второго квадранта, можно применить затем лемму 4.2 к сужению функции F_ε на верхнюю полуплоскость, взяв $\beta = 0 < 1 = \alpha$. При этом получим, что $|F_\varepsilon(x+iy)| \leqslant 1$ при $y \geqslant 0$. Устремляя $\varepsilon \to 0$, найдем, что $|F(x+iy)| \leqslant \exp\{\sigma y\}$ при $y \geqslant 0$. После этого лемма доказывается применением полученного результата к функции $G(z) = F(-z)$.

Лемма 4.4. *Пусть F — функция экспоненциального типа σ, такая, что ее сужение на ось x имеет L^2-норму, не превосходящую 1. Тогда*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2\, dx\right)^{1/2} \leqslant e^{\sigma|y|}$$

при всех вещественных y.

Доказательство. Пусть φ — ограниченная функция вещественного переменного с компактным носителем и $\|\varphi\|_2 \leqslant 1$. Определим функцию $G(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(z+t)\varphi(t)\,dt$; тогда G — аналитическая функция и для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$|G(z)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} A_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|} e^{(\sigma+\varepsilon)|t|} |\varphi(t)|\,dt = B_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}.$$

Таким образом, G — также функция экспоненциального типа σ. Далее, из неравенства Шварца следует, что

$$|G(x)| \leqslant \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant 1.$$

Применяя теперь к функции G лемму 4.3, получим

$$(4.5) \qquad \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(z+t)\varphi(t)\,dt\right| = |G(z)| = |G(x+iy)| \leqslant e^{\sigma|y|}$$

при всех вещественных y. Итак, применив обратное неравенство Шварца и взяв верхнюю грань левой части неравенства (4.5) по всем таким φ, получим лемму 4.4.

Теперь можно закончить доказательство теоремы Пэли — Винера. Пусть F — функция экспоненциального типа σ и ее сужение на вещественную ось принадлежит пространству $L^2(-\infty, \infty)$. Надо доказать, что обратное преобразование Фурье этого сужения обращается в 0 почти всюду вне отрезка $[-\sigma/2\pi, \sigma/2\pi] = [-\tau, \tau]$. При этом, не теряя общности, можно предположить, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2\,dx \leqslant 1$.

Пусть $G_+(z) = e^{i\sigma z} F(z)$. Тогда с помощью леммы 4.4 получаем

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |G_+(x+iy)|^2\,dx\right)^{1/2} = e^{-\sigma y}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant e^{-\sigma y} e^{\sigma y} = 1$$

при всех $y \geqslant 0$. Таким образом, G_+ принадлежит пространству $H^2(T_{R+}) = H^2(E_2^+)$, т. е. H^2-пространству, связанному с верхней полуплоскостью. Из результатов предыдущего параграфа (см., в частности, теорему 3.1 и следствие 3.4) вытекает, что существует функция $g \in L^2(-\infty, \infty)$, равная 0 на отрицательной полуоси и такая, что

$$G_+(x+iy) = G_+(z) = \int\limits_0^{\infty} g(t)\,e^{2\pi izt}\,dt$$

при всех $y > 0$. Положим $f(s) = g(\tau - s) = g[(\sigma/2\pi) - s]$; тогда последнее равенство можно переписать в виде

$$F(z) = F(x + iy) = \int_{-\infty}^{\tau} f(s)\, e^{-2\pi i z s} ds$$

при всех $y > 0$. Переходя к пределу при $y \to 0$, видим, что обратное преобразование Фурье функции $F(x)$ равно 0 для почти всех $s \geqslant \tau$. Применяя эти рассуждения к функции $F(-z)$, приходим к выводу, что оно равно 0 и для почти всех $s \leqslant -\tau$, так что теорема 4.1 доказана.

Обобщим теперь этот результат на n измерений. Для этого сначала надо найти подходящее обобщение понятия функции экспоненциального типа. С этой целью введем следующие определения.

Пусть $\|\cdot\|$ и $|\cdot|$ — две нормы в некотором векторном пространстве (над вещественными или комплексными числами); будем говорить, что они *эквивалентны*, если существуют постоянные c_1 и c_2, такие, что $0 < c_1 \leqslant \|x\| / |x| \leqslant c_2 < \infty$ для всех ненулевых векторов x. Хорошо известно, что любая норма $\|\cdot\|$ на E_n эквивалентна евклидовой норме $|\cdot|$. *Единичным шаром* по отношению к норме $\|\cdot\|$ является множество $K = \{x \in E_n;\ \|x\| \leqslant 1\}$. Ясно, что K — *выпуклое, компактное* и *симметричное* (т. е. из $x \in K$ следует, что $-x \in K$) множество. Множество из E_n с такими свойствами называется *симметричным телом*. Нетрудно показать, что множество $K \subset E_n$ является симметричным телом тогда и только тогда, когда K есть единичный шар по отношению к некоторой норме, эквивалентной евклидовой норме.

Пусть K — произвольное множество из E_n; тогда множество $K^* = \{y \in E_n;\ x \cdot y \leqslant 1$ для всех $x \in K\}$ называется *полярой* множества K. Например, пусть $p \geqslant 1$, $K = \{x = (x_1, x_2) \in E_2;\ |x_1|^p + |x_2|^p \leqslant 1\}$; тогда легко проверить, что $K^* = \{y = (y_1, y_2) \in E_2;\ |y_1|^q + |y_2|^q \leqslant 1\}$, где $1 = 1/p + 1/q$. Ясно также, что если K — симметричное тело, то это же верно и для K^*. При этом K^* есть единичный шар по отношению к некоторой норме $\|\cdot\|^*$, называемой *дуальной* к норме, по отношению к которой единичным шаром является множество K. Дуальную норму можно ввести также следующим эквивалентным образом:

$$\|y\|^* = \sup_{x \in K} |x \cdot y|. \tag{4.6}$$

Лемма 4.7. *Пусть множество $K \subset E_n$ выпукло, замкнуто и $0 \in K$. Тогда $K^{**} = (K^*)^* = K$.*

Доказательство. Очевидно, что $K \subset K^{**}$. Таким образом, достаточно доказать, что если $x_0 \notin K$, то $x_0 \notin K^{**}$. Пусть дана такая точка x_0; выберем $y \in K$ так, чтобы $|y - x_0|$ была минимальной.

Разобьем теперь E_n на два множества $\{x \in E_n;\ x \cdot (x_0 - y) > y \cdot (x_0 - y)\}$ и $\{x \in E_n;\ x \cdot (x_0 - y) \leqslant y \cdot (x_0 - y)\}$. Так как $x_0 \cdot (x_0 - y) - y \cdot (x_0 - y) = |x_0 - y|^2 > 0$, то ясно, что x_0 принадлежит первому из этих множеств. Мы утверждаем, что K содержится в последнем. Если это не так, то найдется такой элемент $y_1 \in K$, что $(y_1 - y) \cdot (x_0 - y) > 0$. Выберем такое $\alpha < 1$, что $0 < \alpha < 2(y_1 - y) \cdot (x_0 - y)/|y_1 - y|^2$. Поскольку множество K выпукло, $w = (1 - \alpha) y + \alpha y_1 \in K$ и, следовательно,

$$|w - x_0|^2 = \alpha \{\alpha |y_1 - y|^2 - 2(y_1 - y) \cdot (x_0 - y)\} + \\ + |y - x_0|^2 < |y - x_0|^2,$$

а это противоречит предположению, что $|y - x_0|$ минимальна.

По условию, $0 \in K$, так что $y \cdot (x_0 - y) \geqslant 0$. Тогда можно найти положительную постоянную ε, такую, что $x_0 \cdot (x_0 - y) > \varepsilon$, в то время как $x \cdot (x_0 - y) \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in K$ (если $y \cdot (x_0 - y) > 0$, то можно выбрать $\varepsilon = y \cdot (x_0 - y)$, если же $y \cdot (x_0 - y) = 0$, то годится любое положительное число $\varepsilon < x_0 \cdot (x_0 - y)$). Положим $v = (x_0 - y)/\varepsilon$; тогда

$$K \subset \{x \in E_n;\ x \cdot v \leqslant 1\} \text{ и } x_0 \cdot v > 1.$$

Но это означает, что $v \in K^*$ и что x_0 не может принадлежать K^{**}; таким образом, лемма доказана.

Применяя этот результат к соотношению (4.6), получим

$$\|x\| = \|x\|^{**} = \sup_{y \in K^*} |x \cdot y|. \tag{4.8}$$

Пусть $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}_n$; тогда естественно определить $\|z\|$ следующим образом, обобщив равенство (4.8):

$$\|z\| = \sup_{y \in K^*} |z \cdot y| = \sup_{y \in K^*} |z_1 y_1 + \cdots + z_n y_n|. \tag{4.8'}$$

Будем теперь говорить, что целая функция F, определенная на $\mathbf{C}_n$, есть функция *экспоненциального типа* K, где K — симметричное тело, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная A_ε, такая, что

$$|F(z)| \leqslant A_\varepsilon e^{2\pi(1+\varepsilon)\|z\|}.$$

Класс всех функций экспоненциального типа K будем обозначать $\mathfrak{E}(K)$.

Сформулируем теперь n-мерный аналог теоремы Пэли — Винера.

Теорема 4.9. *Пусть $F \in L^2(E_n)$. Функция F является преобразованием Фурье некоторой функции, равной* 0 *вне симметричного тела K, тогда и только тогда, когда F есть сужение на E_n некоторой функции из $\mathfrak{E}(K^*)$.*

Доказательство. Если F — преобразование Фурье некоторой функции f, равной нулю вне K, то, как легко проверить,

представление

$$F(z)=\int_{E_n} e^{-2\pi i z\cdot t} f(t)\,dt=\int_K e^{-2\pi i x\cdot t} e^{2\pi y\cdot t} f(t)\,dt \tag{4.10}$$

продолжает F до некоторой функции из $\mathcal{E}(K^*)$. В самом деле, из (4.10) непосредственно вытекает, что

$$|F(z)|=|F(x+iy)|\leqslant Ae^{2\pi|y|^*}.$$

Обратное заключение выводится из следующего n-мерного обобщения леммы 4.4:

Лемма 4.11. *Пусть* $F\in\mathcal{E}(K^*)$; *тогда*

$$\left(\int_{E_n}|F(x+iy)|^2\,dx\right)^{1/2}\leqslant e^{2\pi\|y\|^*}\left(\int_{E_n}|F(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Воспользуемся одномерным случаем. Пусть $y\neq 0$ фиксировано в E_n и e_1 — единичный вектор, направленный по y; пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис в E_n. Если $n-1$ вещественных чисел $u_2, \ldots, u_n$ фиксированы, положим $\alpha=\sum_{j=2}^n u_j e_j$ и

$$\varphi(w_1)=F(w_1e_1+\alpha).$$

Ясно, что φ — целая функция одного комплексного переменного $w_1=u_1+iv_1$. Кроме того, легко видеть, что φ — экспоненциального типа $2\pi\|e_1\|^*$. В самом деле, предположение $F\in\mathcal{E}(K^*)$ означает, что для любого данного $\varepsilon>0$ существует постоянная A_ε, такая, что

$$\begin{aligned}|\varphi(w_1)|&\leqslant A_\varepsilon\exp\{2\pi\|w_1e_1+\alpha\|^*(1+\varepsilon)\}\leqslant\\&\leqslant[A_\varepsilon\exp\{2\pi(1+\varepsilon)\|\alpha\|^*\}]\,e^{2\pi\|e_1\|^*(1+\varepsilon)|w_1|}=\\&=A'_\varepsilon e^{2\pi\|e_1\|^*(1+\varepsilon)|w_1|}.\end{aligned}$$

Таким образом, в силу леммы 4.4,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(u_1+iv_1)|^2\,du_1\leqslant e^{4\pi\|e_1\|^*|v_1|}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(u_1)|^2\,du_1$$

для всех $v_1\in(-\infty,\infty)$.

Выберем v_1 так, чтобы $y=v_1e_1$; тогда последнее неравенство примет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|F\left(iy+\sum_{j=1}^n u_je_j\right)\right|^2du_1\leqslant e^{4\pi\|y\|^*}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F\left(\sum_{j=1}^n u_je_j\right)\right|^2du_1.$$

Интегрируя обе части по $u_2, \ldots, u_n$, получим лемму 4.11.

Мы можем теперь закончить доказательство теоремы 4.9. Пусть F — сужение на E_n некоторой функции из $\mathcal{E}(K^*)$. Для простоты

будем по-прежнему обозначать эту функцию F. В силу леммы 4.11, $F \in H^2(T_B)$ для всех ограниченных оснований B. Таким образом, согласно общей теореме о представлении (теорема 2.3), существует такая функция f, что

$$F(z) = \int_{E_n} e^{2\pi i z \cdot t} f(t)\, dt$$

для всех $z = x + iy \in T_B$. Можно считать, что $0 \quad B$; тогда из теоремы Планшереля следует, что $f \in L^2(E_n)$ и $\|f\|_2^2 = \int_{E_n} |F(x)|^2\, dx$.

Таким образом, F — обратное преобразование Фурье функции f, т. е. преобразование Фурье функции $f(-t)$, и теорема будет доказана, если показать, что f равна нулю почти всюду вне K. Для того чтобы сделать это, заметим сначала, что, как следует из теоремы Планшереля,

$$\int_{E_n} |F(x+iy)|^2\, dx = \int_{E_n} e^{-4\pi y \cdot t} |f(t)|^2\, dt$$

для всех $y \in E_n$ (поскольку B можно выбрать сколь угодно большим). Тогда, в силу леммы 4.11,

$$\int_{E_n} |f(t)|^2 e^{-4\pi \|y\| \cdot t} dt \leqslant e^{4\pi |y|^*} \int_{E_n} |f(t)|^2\, dt \tag{4.12}$$

для всех $y \in E_n$. Мы утверждаем, что это неравенство может выполняться лишь в том случае, если f равна 0 почти всюду вне K. Пусть $t_0 \notin K$; тогда, по лемме 4.7, существует $y_0 \in K^*$, такое, что $(t_0 \cdot y_0) < -1$ (напомним, что K^* — симметричное тело). Отсюда ясно, что существуют $\delta > 0$ и окрестность $N = N(t_0)$ точки t_0, такие, что $(t \cdot y_0) < -(1 + \delta)$ для всех $t \in N$. Тогда из неравенства (4.12) следует, что для всех $y = \rho y_0$, $\rho > 0$,

$$\int_N |f(t)|^2 e^{4\pi\rho(1+\delta)} dt \leqslant \int_N |f(t)|^2 e^{-4\pi y \cdot t} dt \leqslant \|f\|_2^2 e^{4\pi\rho\|y_0\|^*}.$$

Так как $y_0 \in K^*$, то $\|y_0\|^* \leqslant 1$, и, следовательно,

$$\left(\int_N |f(t)|^2\, dt\right) e^{4\pi\rho(1+\delta)} \leqslant \|f\|_2^2 e^{4\pi\rho}$$

для всех $\rho > 0$. Предположим, что $\int_N |f(t)|^2\, dt > 0$; тогда

$$e^{4\pi\rho\delta} \leqslant \|f\|_2^2 \Big/ \int_N |f(t)|^2\, dt,$$

что, очевидно, невозможно при достаточно больших ρ. Таким образом, $f(t) = 0$ для почти всех $t \in N$, и теорема доказана.

5. H^p-теория

До сих пор мы рассматривали почти исключительно свойства аналитических в трубчатых областях функций, принадлежащих пространству H^2. В частности, мы исследовали существование граничных значений только в L^2-смысле. В этом параграфе будут получены некоторые результаты, касающиеся существования поточечных пределов при приближении к границе основания, а также существования L^p-пределов, $p > 0$.

Начнем с изучения частного случая трубчатой области T_Γ, где Γ — *первый октант:*

$$\Gamma = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in E_n; \quad y_1 > 0, \ldots, y_n > 0\}.$$

Очевидно, что Γ—конус и что $\Gamma^* = \overline{\Gamma}$. Ядро Коши, связанное с T_Γ, имеет вид

$$K(z) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{2\pi i(z_1t_1 + \cdots + z_nt_n)}dt_1 \ldots dt_n = \prod_{j=1}^n \frac{-1}{2\pi i z_j},$$

где $z = (z_1, \ldots, z_n) \in T_\Gamma$. Таким образом, $K(z)$ есть произведение n одномерных ядер Коши, связанных с верхней полуплоскостью. Отсюда следует, что ядро Пуассона $\mathcal{P}(x, y)$ (см. 3.7 и обсуждение перед этим утверждением) есть произведение n одномерных ядер Пуассона:

$$\mathcal{P}(x, y) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\pi} \frac{y_j}{x_j^2 + y_j^2}, \qquad y_1, \ldots, y_n > 0.$$

Это ядро является, следовательно, частным случаем повторных ядер Пуассона, изученных в § 3 гл. II (см., в частности, теорему 3.22, следствие 3.23 и материал перед этими результатами). Отождествляя компоненты $z_j = x_j + iy_j$ точки $z = (z_1, \ldots, z_n) \in T_\Gamma$ с упорядоченными парами (x_j, y_j), можно рассматривать трубчатую область T_Γ как прямое произведение $E_2^+ \times \ldots \times E_2^+$ верхних полуплоскостей двумерного вещественного евклидова пространства. Таким образом, в соответствии с определениями, введенными в § 3 гл. II, можно сказать, что функция u, определенная в T_Γ, обладает следующими свойствами:

(i) имеет некасательный предел l по каждой переменной в точке $x \in E_n$, если $u(\zeta) = u(\xi + i\eta) = u(\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_n + i\eta_n)$ стремится к l, когда точка $\zeta = (\xi_1, \eta_1; \ldots; \xi_n, \eta_n)$ стремится к $x = (x_1, \ldots, x_n) = (x_1, 0; \ldots; x_n, 0)$ внутри прямого произведения

$$\gamma_\alpha(x) = \Gamma_{\alpha_1}(x_1) \times \cdots \times \Gamma_{\alpha_n}(x_n) \subset T_\Gamma$$

для каждого набора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ положительных чисел [1];

[1] Мы используем обозначение, введенное в § 3 гл. II:
$\Gamma_{\alpha_j}(x_j) = \{(\xi_j, \eta_j) \in E_2^+; \quad |\xi_j - x_j| < \alpha_j\eta_j\}, \quad j = 1, \ldots, n.$

(ii) некасательно ограничена по каждой переменной в точке $x \in E_n$, если она ограничена на множестве $\gamma_\alpha(x) \cap \{\xi + i\eta \in T_\Gamma;\ \eta_1, \ldots, \eta_n \leqslant 1\}$ для каждого набора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ положительных чисел.

Существование поточечных пределов и пределов по норме при приближении к началу внутри первого октанта можно доказать для всех функций из пространств $H^p(T_\Gamma)$, $p > 0$. Точнее, справедливы следующие утверждения:

Теорема 5.1. *Пусть $F \in H^p(T_\Gamma)$, $p > 0$, где Γ — первый октант в E_n; тогда:*

(a) *F имеет некасательный предел $F(x)$ по каждой переменной для почти любой точки $x \in E_n$. В частности, предел*

$$\lim_{y \in \Gamma, y \to 0} F(x + iy) = F(x)$$

существует для почти всех $x \in E_n$;

(b) $\int\limits_{E_n} |F(x+iy) - F(x)|^p\, dx$ *стремится к 0, когда $y \in \Gamma$ стремится к $0 \in E_n$.*

Доказательство. Фиксируем $(\zeta_2, \ldots, \zeta_n) = (\xi_2 + i\eta_2, \ldots, \xi_n + i\eta_n)$, $\eta_2, \ldots, \eta_n > 0$, и рассмотрим функцию g одного комплексного переменного, определенную равенством $g(\zeta_1) = F(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$, где $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ принадлежит верхней полуплоскости E_2^+. Покажем сначала, что $g \in H^p(E_2^+)$. Поскольку $|F(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)|^p$ субгармонична как функция переменной $\zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2$ (см. пример (3) в § 4 и п. 5.1 гл. II), то, положив $w_2 = u_2 + iv_2$, получим

$$|F(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)|^p \leqslant \frac{1}{\pi\eta_2^2} \int\limits_{|w_2 - \zeta_2| < \eta_2} |F(\zeta_1, w_2, \ldots, \zeta_n)|^p\, du_2 dv_2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi\eta_2^2} \int\limits_0^{2\eta_2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(\zeta_1, w_2, \ldots, \zeta_n)|^p\, du_2 dv_2.$$

Повторяя эти рассуждения для $\zeta_3, \ldots, \zeta_n$, получим

$$|F(\zeta)|^p \leqslant \pi^{1-n} (\eta_2 \ldots \eta_n)^{-2} \times$$
$$\times \int\limits_0^{2\eta_n} \cdots \int\limits_0^{2\eta_2} \left(\int\limits_{E_{n-1}} |F(\zeta_1, w_2, \ldots, w_n)|^p\, du_2 \ldots du_n \right) dv_2 \ldots dv_n.$$

Интегрируя теперь обе части этого неравенства по ξ_1, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(\xi_1 + i\eta_1)|^p\, d\xi_1 \leqslant$$

$$\leqslant \pi^{1-n}(\eta_2 \ldots \eta_n)^{-2} \int_0^{2\eta_n} \cdots \int_0^{2\eta_2} \left(\int_{E_n} |F(u+iv)|^p \, du \right) dv_2 \ldots dv_n \leqslant$$

$$\leqslant \pi^{1-n}(\eta_2 \ldots \eta_n)^{-2} \| F \|_p^p (2\eta_2 \ldots 2\eta_n) = A_1 < \infty.$$

Отсюда следует, что $g \in H^p(E_2^+)$.

Пусть $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in T_\Gamma$; положим $s(\zeta) = |F(\zeta)|^{p/2}$. Предыдущее неравенство можно тогда выразить в терминах функции s:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [s(\xi_1 + i\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)]^2 \, d\xi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\xi_1 + i\eta_1)|^p \, d\xi_1 \leqslant A_1 < \infty.$$

Поскольку $s(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ — субгармоническая функция переменного ζ_1 при фиксированных остальных переменных, то это неравенство вместе с равенством (4.12) гл. II дает

$$s(\xi_1 + i[\varepsilon_1 + \eta_1], \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1 + \varepsilon_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \frac{1}{(\xi_1 - t_1)^2 + \eta_1^2} \, dt_1$$

для всех $\varepsilon_1 > 0$. Применяя эти же рассуждения к переменным $\zeta_2, \ldots, \zeta_n$, получим

$$(5.2) \quad s(\xi + i[\varepsilon + \eta]) = s(\xi_1 + i[\varepsilon_1 + \eta_1], \ldots, \xi_n + i[\varepsilon_n + \eta_n]) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{E_n} s(t + i\varepsilon) \mathcal{P}(\xi - t, \eta) \, dt$$

для всех $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \Gamma$.

Так как $F \in H^p(T_\Gamma)$, то семейство $\{f_\varepsilon\}$, где $f_\varepsilon(t) = s(t + i\varepsilon)$, $\varepsilon \in \Gamma$, равномерно ограничено по L^2-норме (действительно, $\| f_\varepsilon \|_2^2 \leqslant \| F \|_p^p$). Следовательно, в силу слабой компактности единичного шара в $L^2(E_n)$, можно найти последовательность $\{\varepsilon^{(k)}\}$, сходящуюся к $0 \in E_n$ и такую, что $\{f_{\varepsilon^{(k)}}\}$ слабо сходится к некоторой функции f из $L^2(E_n)$ при $k \to \infty$. Подставляя $\varepsilon = \varepsilon^{(k)}$ в (5.2) и устремляя $k \to \infty$, получим

$$(5.3) \qquad s(\xi + i\eta) \leqslant \int_{E_n} f(t) \mathcal{P}(\xi - t, \eta) \, dt = m(\xi + i\eta).$$

Так как функция $m(\xi + i\eta)$ есть повторный интеграл Пуассона некоторой функции из $L^2(E_n)$, то она некасательно ограничена по каждой переменной для почти всех $x \in E_n$ (см. рассуждения после следствия 3.23 гл. II). В силу неравенства (5.3), это же справедливо и для функции $s(\xi + i\eta) = |F(\xi + i\eta)|^{p/2}$. Применяя тогда к

вещественной и мнимой частям функции F теорему 3.24 гл. II, получим часть (a) теоремы 5.1.

Часть (b) доказывается теперь легко. Обозначим через $Mf = M^{(n)} M^{(n-1)} \dots M^{(1)} f$ суперпозицию одномерных максимальных функций, соответствующих переменным $x_1, \dots, x_n$[1]; тогда $m(x+iy) \leqslant A(Mf)(x)$ для всех $x+iy \in T_\Gamma$, где A — постоянная, не зависящая от $y \in \Gamma$, и $f \in L^2(E_n)$ (см. рассуждения перед теоремой 3.22 гл. II). Таким образом, в силу (5.3), имеем

$$|F(x+iy)|^p \leqslant \{A(Mf)(x)\}^2. \tag{5.4}$$

Доказав часть (a), мы установили справедливость почти всюду равенства $\lim\limits_{y\in\Gamma, y\to 0} |F(x+iy) - F(x)| = 0$. Из неравенства (5.4) следует, что эта сходимость мажорируется почти всюду постоянной, умноженной на $\{(Mf)(x)\}^2$:

$$|F(x+iy) - F(x)|^p \leqslant 2^p (|F(x+iy)|^p + |F(x)|^p) \leqslant 2^{p+1} \{A(Mf)(x)\}^2.$$

Так как $f \in L^2(E_n)$, то из оценки (3.20) гл. II следует, что $Mf \in L^2$. Таким образом, часть (b) есть непосредственное следствие теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Выведем теперь несколько следствий из этой теоремы. Сначала предположим, что Γ — внутренность выпуклой оболочки n линейно независимых лучей, выходящих из начала координат. Выбрав векторы $a_1, \dots, a_n$ вдоль этих лучей, конус Γ можно описать как открытый конус $\{v = v_1 a_1 + \dots + v_n a_n \in E_n;\ v_1 > 0, \dots, v_n > 0\}$.

Теорема 5.1 будет справедливой тогда для всех функций $F \in H^p(T_\Gamma)$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим линейное преобразование A, переводящее базисные векторы e_j в a_j, $j = 1, \dots, n$. Тогда A переводит первый октант в конус Γ. Расширяя A линейным образом на $\mathbf{C}_n$ и полагая $G(x+iy) = G(z) = F(Az) = F(Ax + iAy)$ для z из трубчатой области над первым октантом, получим

$$\int_{E_n} |G(x+iy)|^p\, dx = \frac{1}{|\det A|} \int_{E_n} |F(u+iAy)|^p\, du \leqslant \frac{1}{|\det A|} \|F\|_p^p$$

для всех y из первого октанта. Таким образом, функция G удовлетворяет условиям теоремы 5.1. Но тогда, очевидно, существует почти всюду предел

$$F(u) = \lim_{v\in\Gamma, v\to 0} F(u+iv),$$

так же как и соответствующий предел по L^2-норме.

---

[1] Пусть g — функция переменной $x = (x_1, \dots, x_n)$; тогда

$$(M^{(j)}g)(x) = \sup_{r>0} (2r)^{-1} \int_{|t|\leqslant r} |g(x_1, \dots, x_j - t, \dots, x_n)|\, dt, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Вообще, будем говорить, что Γ — *многоугольный конус*, если он является внутренностью выпуклой оболочки конечного числа лучей, выходящих из начала координат, среди которых найдутся n линейно независимых. Многоугольный конус является, очевидно, объединением конечного числа конусов рассмотренного в предыдущем абзаце типа, так что поточечные пределы и пределы по норме при приближении к началу существуют также и у функций класса H^p, связанного с трубчатой областью над многоугольным конусом.

Отсюда легко выводится следующая

Теорема 5.5. *Пусть $F \in H^p(T_\Gamma)$, $p > 0$, где Γ — открытый выпуклый конус в E_n; тогда для любого конуса Γ_1, замыкание которого содержится в $\Gamma \cup \{0\}$, имеем:*

(a) *предел* $\lim\limits_{y \in \Gamma_1, y \to 0} F(x+iy) = F(x)$ *существует для почти всех* $x \in E_n$;

(b) $\int\limits_{E_n} |F(x+iy) - F(x)|^p \, dx \to 0$, *когда* $y \in \Gamma_1$ *стремится к* 0.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что существует многоугольный конус Γ_0, такой, что $\overline{\Gamma}_1 \subset \Gamma_0 \cup \{0\} \subset \Gamma \cup \{0\}$. Для этого рассмотрим пересечение $\overline{\Gamma}_1$ с единичной сферой $\Sigma_{n-1} \subset E_n$. Обозначим это пересечение через S. Очевидно, что для каждого $x \in S$ существует открытый многоугольный конус Γ_x, такой, что $x \in \Gamma_x \subset \Gamma$. Так как S — компакт, то существует конечное семейство таких конусов $\{\Gamma_{x_1}, \ldots, \Gamma_{x_m}\}$, покрывающее S. Обозначив через Γ_0 выпуклую оболочку объединения этих m конусов, получим искомые включения $\overline{\Gamma}_1 \subset \Gamma_0 \cup \{0\} \subset \Gamma \cup \{0\}$.

В § 2 этой главы (сразу после теоремы 2.11) мы ввели понятия суженного и несуженного пределов при приближении к граничной точке основания B трубчатой области T_B. Из доказательства теоремы 5.5 видно, что она имеет эквивалентную формулировку в терминах этих понятий:

Теорема 5.5′. *Пусть $F \in H^p(T_\Gamma)$, $p > 0$; тогда $F(z)$ имеет суженные пределы почти всюду и по L^p-норме при приближении к 0 внутри Γ.*

Из упомянутого доказательства также следует, что если $F \in H^p(T_\Gamma)$, то F имеет суженные некасательные пределы почти во всех точках x^0 в том смысле, что существует предел $F(x+iy)$, когда $x + iy \to x^0$, где $y \in \Gamma_1$ и $x + iy \in \gamma_\alpha(x^0)$, для любого собственного подконуса Γ_1 конуса Γ и любого конуса $\gamma_\alpha(x^0)$.

С помощью ядра Пуассона $\mathcal{P}(x, y)$, связанного с трубчатой областью T_Γ, можно доказать, что при $p \geqslant 1$ существуют *несуженные* пределы по норме. Точнее, справедлива следующая

Теорема 5.6. *Пусть* Γ — *острый открытый выпуклый конус в* E_n, *и пусть* $F \in H^p(T_\Gamma)$, $1 \leqslant p < \infty$; *тогда*

$$\lim_{y \in \Gamma, y \to 0} \int_{E_n} |F(x+iy) - F(x)|^p \, dx = 0,$$

где $F(x)$ — *предельная функция, существование которой было установлено в предыдущей теореме.*

Доказательство. Покажем сначала, что ядро Пуассона $\mathcal{P}(x, y)$ обладает следующим «полугрупповым свойством»[1]: пусть $F \in H^p(T_\Gamma)$ и $y_1, y_2 \in \Gamma$; тогда

$$F(x + i(y_1 + y_2)) = \int_{E_n} F(t + iy_2)\, \mathcal{P}(x - t, y_1)\, dt. \tag{5.7}$$

Если $p = 2$, то это утверждение есть непосредственное следствие теоремы 3.9. В общем случае из леммы 2.12 следует, что (если $p > 0$) функция $G(x + iy) = F(x + i(y + y_2))$ равномерно ограничена в T_Γ. Обозначим через φ непрерывную неотрицательную функцию с носителем, компактным в Γ^*, такую, что $\int_{E_n} \varphi(t)\, dt = 1$ (такая функция φ существует, поскольку конус Γ острый). Пусть $\psi(z) = \int_{E_n} e^{2\pi i z \cdot t} \varphi(t)\, dt$; теорема 3.1 утверждает, что $\psi \in H^2(T_\Gamma)$, следовательно, функция $G_\varepsilon(z) = \psi(\varepsilon z)\, G(z)$ принадлежит $H^2(T_\Gamma)$ при всех $\varepsilon > 0$. Таким образом, в силу теоремы 3.9,

$$G_\varepsilon(x + iy) = \int_{E_n} G_\varepsilon(t)\, \mathcal{P}(x - t, y)\, dt. \tag{5.8}$$

Кроме того, $|\psi(z)| \leqslant \int_{\Gamma^*} e^{-2\pi y \cdot t} \varphi(t)\, dt \leqslant 1$ и $\lim_{\varepsilon \to 0} \psi(\varepsilon z) = 1$. Эти факты вместе со свойством $\mathcal{P}(\cdot, y) \in L^q(E_n)$, где $1/p + 1/q = 1$ (см. 3.7), позволяют нам перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ в обеих частях равенства (5.8) и получить, что $G(x + iy) = \int_{E_n} G(t)\, \mathcal{P}(x - t, y)\, dt$. Но это и есть искомое свойство (5.7) с $y_1 = y$.

[1] С помощью следствия 1.28 гл. I нетрудно показать, что $u(x, y_1 + y_2) = \int_{E_n} u(t, y_2)\, P(x - t, y_1)\, dt$, если u — гармоническая в E^+_{n+1} функция, такая, что $\|u(\cdot, y)\|_p \leqslant c < \infty$ при всех $y > 0$. В данном случае мы ограничиваемся голоморфными функциями F, так как ядро $\mathcal{P}$, вообще говоря, не воспроизводит гармонические (или кратногармонические) функции.

Часть (b) теоремы 5.5 утверждает, что при суженном стремлении $y_2 \to 0$ мы получим равенство

$$F(x+iy) = \int_{E_n} F(t)\,\mathcal{P}(x-t, y)\,dt \tag{5.9}$$

для всех $y \in \Gamma$.

Остальная часть доказательства аналогична доказательству теоремы 1.10 гл. II и основана на свойствах (i), (ii) и (iii) ядра $\mathcal{P}$, которые были установлены сразу вслед за равенством (3.8)[1]. Обозначая через $\omega(r)$ модуль непрерывности функции F и используя свойство (ii), обычное неравенство Минковского, получаемое из него интегральное неравенство и свойство (i) (в указанном порядке), имеем

$$\left(\int_{E_n} |F(x+iy)-F(x)|^p\,dx\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_{E_n}\left|\int_{E_n}\{F(x-t)-F(x)\}\,\mathcal{P}(t, y)\,dt\right|^p dx\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{E_n}\left|\int_{|t|\leqslant\delta}\{F(x-t)-F(x)\}\,\mathcal{P}(t, y)\,dt\right|^p dx\right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int_{E_n}\left|\int_{|t|>\delta}\{F(x-t)-F(x)\}\,\mathcal{P}(t, y)\,dt\right|^p dx\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|t|\leqslant\delta}\left(\int_{E_n}|F(x-t)-F(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\mathcal{P}(t, y)\,dt +$$

$$+ \int_{|t|>\delta}\left(\int_{E_n}|F(x-t)-F(t)|\,dx\right)^{1/p}\mathcal{P}(t, y)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \{\sup_{|t|\leqslant\delta}\omega(|t|)\}\int_{E_n}\mathcal{P}(t, y)\,dt + 2\|F\|_p\int_{|t|>\delta}\mathcal{P}(t, y)\,dt.$$

Первое слагаемое равно $\sup\limits_{|t|\leqslant\delta}\omega(|t|)$, поскольку, в силу свойства (ii), $\int\limits_{E_n}\mathcal{P}(t, y)\,dt = 1$; следовательно, оно будет меньше любого заданного $\varepsilon > 0$, если δ выбрать достаточно малым (см. доказательство теоремы 1.18 гл. I). Выберем такое δ; тогда, в силу свойства (iii), последнее слагаемое стремится к 0, когда y стремится к началу внутри Γ. Таким образом, $\left(\int\limits_{E_n}|F(x+iy) - F(x)|^p dx\right)^{1/p} < \varepsilon$, если $y \in \Gamma$ достаточно близко к 0. Это доказывает теорему.

---

[1]) Отметим, что предлагаемое ниже доказательство может быть также использовано для вывода равенства (3.8).

6. Дальнейшие результаты

6.1. На протяжении большей части этой главы мы рассматривали только трубчатые области, имеющие открытые выпуклые основания B. В § 2 было показано, что если $F \in H^2(T_B)$, где B — только открытое связное множество, то F допускает аналитическое продолжение G в выпуклую оболочку T_{B^c} области T_B, причем $G \in H^2(T_{B^c})$ и $\|F\|_2 = \|G\|_2$ (см. следствие 2.4). Этот факт, так же как и большая часть остальных результатов § 2 этой главы, является простым следствием основной теоремы о представлении (теоремы 2.3). Существует много других причин рассматривать только выпуклые основания. Давно известно, что если функция F голоморфна в трубчатой области T_B с открытым связным основанием B, то она допускает аналитическое продолжение G в трубчатую область T_{B^c} (см. теорему 9 гл. V книги Бохнера и Мартина [1]). Легко видеть, что функция G принимает только те значения, которые принимает функция F. Если бы это было не так и z_0 принадлежала области изменения функции G, но не принадлежала области изменения функции F, то функция $1/(F - z_0)$ была бы голоморфна в T_B и аналитически продолжалась до голоморфной в T_{B^c} функции $1/(G - z_0)$. Но это, очевидно, невозможно.

Эти факты можно использовать для получения другого доказательства следствия 2.4, допускающего обобщение на другие пространства H^p [1]. Пусть $F \in H^2(T_B)$ и $h \in L^2(E_n)$, причем $\|h\|_2 = \int_{E_n} |h(t)|^2\,dt = 1$; тогда функция

$$f(z) = f(x + iy) = \int_{E_n} F(x + t + iy)\,h(t)\,dt$$

голоморфна в T_B. При этом, в силу неравенства Гёльдера,

$$|f(z)| \leqslant \|F\|_2 \|h\|_2 = \|F\|_2.$$

Обозначим через G аналитическое продолжение функции F в T_{B^c}; тогда очевидно, что

$$g(z) = \int_{E_n} G(z + t)\,h(t)\,dt$$

---

[1] Приведенное в оригинале доказательство содержало ошибки; при переводе они были исправлены.— *Прим. перев.*

будет аналитическим продолжением в T_{B^c} функции f [1]. Так как при $z \in T_B$

$$\left| \int_{E_n} G(z+t)\, h(t)\, dt \right| = |g(z)| = |f(z)| \leqslant \|F\|_2,$$

то из приведенных выше замечаний следует, что такое же неравенство останется справедливым и для $z \in T_{B^c}$. Фиксируем произвольное $y \in B^c$ и для произвольной функции $h \in L^2(E_n)$ положим

$$(G_y, h) = \int G(x+iy)\, h(x)\, dx.$$

В силу установленного выше неравенства,

$$\|G_y\|_2 = \sup_{\|h\|_2=1} |(G_y, h)| \leqslant \|F\|_2,$$

так что $G_y \in [L^2(E_n)]'$. Но последнее, как хорошо известно, совпадает с самим $L^2(E_n)$, причем

$$\|G_y\|_2 = \sup_{y \in B^c} \|G_y\|_2.$$

Отсюда и из последнего неравенства вытекает утверждение следствия 2.4. Обобщение доказательства на случай пространства $H^p(T_B)$ с произвольным $p > 1$ очевидно. В случае $0 < p \leqslant 1$ необходимо использовать тот факт, что $\log \|F(\cdot + iy)\|_p$—выпуклая функция переменной $y \in B$.

6.2. Другое применение H^2-теории (и, в частности, теоремы 2.3) состоит в следующем.

Пусть B^+ — открытое выпуклое множество E_n, такое, что 0 есть одн из его граничных точек, и $B^- = \{x \in E_n;\ -x \in B^+\}$. Предположим, что существуют две функции $F^+ \in H^2(T_{B^+})$ и $F^- \in H^2(T_{B^-})$, такие, что почти всюду совпадают пределы

$$F^+(x+i0) = \lim_{y \in B^+,\, y \to 0} F^+(x+iy) = \lim_{y \in B^-,\, y \to 0} F^-(x+iy) = F^-(x-i0)$$

(эти пределы следует понимать в смысле, описанном в (2.8)). Тогда существует аналитическая функция F, определенная в трубчатой области над выпуклой оболочкой множества $B^+ \cup B^-$, такая, что $F(z) = F^+(z)$ при $z \in T_{B^+}$ и $F(z) = F^-(z)$ при $z \in T_{B^-}$.

Для доказательства заметим сначала, что из теоремы 2.3 следует существование двух функций f^+ и f^-, таких, что $F^+(z) =$

---

[1] Нетрудно показать, что последний интеграл определен. Рассмотрев сначала подмножество $B_0 \subset B$, как и в лемме 2.12, можно считать, что F и, следовательно, G ограничены. Тогда, выбрав $h \in L^1(E_n) \cap L^2(E_n)$, мы обеспечим интегрируемость функции $G(z+t)\, h(t)$. Этого, очевидно, достаточно для наших целей.

$= \int\limits_{E_n} e^{2\pi i z\cdot t} f^{+}(t)\,dt$ и $F^{-}(z) = \int\limits_{E_n} e^{2\pi i z\cdot t} f^{-}(t)\,dt$. При этом f^{+} и f^{-} — преобразование Фурье функции $F^{+}(x+i0)$ $(= F^{-}(x-i0))$ (см. обсуждение в связи с (2.8)). Следовательно, $f^{+}(t) = f^{-}(t)$ почти всюду. Полагая $f(t) = f^{\pm}(t)$ почти всюду и используя то, что множество $S = \{y \in E_n;\ \int\limits_{E_n} |f(t)|^2 e^{-4\pi y\cdot t} dt \leqslant M^2 < \infty\}$ выпукло (см. доказательство следствия 2.4), приходим к выводу, что функция $F(z) = \int\limits_{E_n} e^{2\pi i z\cdot t} f(t)\,dt$ аналитична в T_S — множестве, содержащем трубчатую область над выпуклой оболочкой множества $B^{+} \cup B^{-}$ (см. (2.2)), и совпадает с $F^{+}(z)$ в $T_{B^{+}}$ и с $F^{-}(z)$ в $T_{B^{-}}$.

Близкие результаты и различные обобщения см. в книге Стритера и Уайтмена [1][1)].

6.3. Теорему 2.11 можно обобщить на три измерения. Результат формулируется следующим образом (см. Стейн, Вейс и Вейс [1]):

Пусть точка y_0 принадлежит границе ∂B открытого выпуклого множества $B \subset E_3$. Тогда y_0 — точка несуженной L^2-сходимости (т. е. $\lim\limits_{y\to y_0, y\in B} F(x+iy)$ существует в L^2-смысле для всех $F \in H^2(T_B)$) в том и только в том случае, когда существуют конечное множество $V = \{y_1, \ldots, y_n\}$ «вершин», лежащих в $\overline{B}$, и окрестность N точки y_0, такие, что если $y \in N \cap \partial B$ и π_y — опорная плоскость в точке y, то π_y содержит по крайней мере один элемент из V.

Это условие нелокальное. Например, если B — круговой конус, то из этого результата следует, что каждая точка ∂B есть точка несуженной L^2-сходимости; однако если отсечь от этого конуса какую-либо окрестность вершины, то оставшиеся граничные точки уже не будут точками несуженной сходимости.

Остается открытой задача обобщения этого результата на высшие размерности.

6.4. Пусть функция F голоморфна в верхней полуплоскости $E_2^{+} = \{z = x + iy;\ y > 0\} \subset \mathbf{C}_1$; тогда всюду, за исключением некоторого множества точек оси x линейной лебеговой меры 0, справедливо следующее утверждение: либо F имеет некасательный

---

1) Значительно более общие и глубокие результаты по проблеме аналитического продолжения функций многих комплексных переменных группируются вокруг известной теоремы «острие клина», впервые доказанной Н. Н. Боголюбовым в 1956 г. и получившей многочисленные применения в математическом анализе и квантовой теории поля. См. по этому вопросу книгу Владимирова [1], гл. V, а также работу Мартино [1]. — *Прим. перев.*

предел в точке $(x_0, 0)$, либо F отображает каждую треугольную область $\Delta(x_0; \alpha, \beta) = \{x + iy \in E_2^+; |x - x_0| < \alpha y < \beta\}$ плотно в комплексную плоскость. Этот результат есть частный случай классического результата Плеснера [1] и может быть легко получен из частного случая $n = 1$ теоремы 3.19 гл. II. Аналогичным образом теорема 3.24 гл. II дает следующее обобщение на n измерений результата Плеснера (см. Кальдерон [4]). Пусть функция F голоморфна в T_Γ, где Γ — первый октант; тогда всюду, за исключением некоторого множества из E_n меры 0, либо F имеет некасательный предел по каждой переменной в точке $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, либо F отображает плотно в комплексную плоскость каждое прямое произведение треугольных областей $\Delta(x_0; \alpha, \beta) = \Delta(x_1^0; \alpha_1, \beta_1) \times \ldots \times \Delta(x_n^0; \alpha_n, \beta_n)$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ принадлежат конусу Γ. Отсюда следует, что если вещественная часть голоморфной функции $F = u + iv$, определенной в T_Γ, имеет некасательные пределы по каждой переменной в точках некоторого множества $S \subset E_n$, то и мнимая часть F имеет такие пределы почти во всех точках множества S. Это следует из того, что если u имеет некасательный предел по каждой переменной в точке x, то F не может отображать $\Delta(x; \alpha, \beta)$ в плотное подмножество комплексной плоскости $\mathbf{C}_1$.

6.5. Рассматривались также и другие понятия суженной сходимости. Пусть для простоты u — функция, определенная в T_Γ, где Γ — первый квадрант в E_2. Будем говорить, что u имеет суженный криволинейный предел $u(x_0)$ в точке $x_0 \in E_2$, если $u(x_0 + iy(t)) \to u(x_0)$, когда $t \to 0$ вдоль любой непрерывной кривой $y(t) = (h(t), k(t))$, $t \geqslant 0$, где функции h и k строго возрастают к ∞ и $h(0) = 0 = k(0)$[1]. Мы уже отмечали (см. п. 5.7 гл. II), что повторный интеграл Пуассона $u(x + iy)$ L^1-функции f не обязан иметь несуженные пределы почти во всех точках $x \in E_2$. Можно показать, однако, что $u(x + iy)$ сходится почти всюду к $f(x)$ в только что описанном суженном криволинейном смысле. Это можно сделать, модифицируя соответствующим образом рассуждения, приведенные в книге Зигмунда [1], т. 2. Такое понятие суженной сходимости можно обобщить на трубчатые области над конусами общего вида и получить другой вариант теоремы 5.5′. (В этой связи см. замечания, следующие сразу за теоремой 5.5′.) Построенный в § 2 контрпример показывает, что ситуация значительно усложняется, когда основание трубчатой области — не конус. Дальнейшей иллюстрацией уместности

---

[1] В более общем случае можно рассматривать некасательные суженные криволинейные пределы по каждой переменной, позволяя $x + iy(t)$ стремиться к x_0 внутри областей $\gamma_\alpha(x_0)$, введенных в начале § 5. Читатель не должен смешивать этот тип некасательного (или касательного) подхода к x_0 (внутри T_Γ) с некасательным (или касательным) подходом $y = y(t)$ к 0 (внутри Γ). Ради простоты мы еще раз пожертвовали общностью, рассмотрев только двумерный случай, хотя введенные понятия имеют очевидное обобщение на n измерений.

понятия суженной сходимости, когда основание — конус, являются примеры, приведенные в п. 6.8 ниже.

6.6. Из теоремы 5.1 следует, в частности, что несуженные пределы $\lim\limits_{y\in\Gamma, y\to 0} F(x+iy) = F(x)$ существуют для почти всех $x \in E_n$, если Γ — первый октант, а $F \in H^p(T_\Gamma)$, $p > 0$. Следствие 3.23 гл. II утверждает, что то же самое справедливо для повторного интеграла Пуассона функции f из $L^p(E_n)$, $p > 1$. Мы уже отмечали, что эта несуженная сходимость может не иметь места, если $f \in L^1(E_n)$; однако если дополнительно предположить, что $|f|(\log|f|)^{n-1}$ (считая это выражение равным 0, когда $|f| = 0$) локально интегрируема (что имеет место, когда $f \in L^p(E_n)$, $p > 1$), то повторный интеграл Пуассона функции f сходится несуженным образом к $f(x)$ для почти всех $x \in E_n$ (см. Иессен, Марцинкевич и Зигмунд [1]).

6.7. Острый конус $\Gamma \subset E_n$ называется *самосопряженным,* если его замыкание $\overline{\Gamma}$ совпадает с сопряженным конусом Γ^*. Автоморфизмом острого конуса Γ называется линейный оператор на E_n, отображающий Γ на Γ. Множество всех автоморфизмов конуса Γ образует замкнутую подгруппу $\Sigma = \Sigma(\Gamma)$ общей линейной группы $GL(E_n)$. Если группа Σ транзитивна (т. е. для любых точек x и y из Γ найдется автоморфизм $\rho \in \Sigma$, такой, что $\rho x = y$) и конус Γ самосопряженный, то он называется *(однородной) областью положительности*. Пренебрегая исключительным конусом низшей размерности, все области положительности можно представить в виде прямых сумм следующих четырех типов областей положительности, часто называемых «классическими областями» (подробнее см. Кёхер [1], Ротхаус [1] и Винберг [1]):

(i) *Световой конус будущего.* Это есть конус $C_n \subset E_n$, $n > 1$, состоящий из всех $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_n$, таких, что $x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2 > 0$ и $x_1 > 0$. Группа автоморфизмов $\Sigma = \Sigma(C_n)$ состоит из всех линейных преобразований ρ, сохраняющих (с точностью до постоянного положительного множителя) билинейную форму $(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2 - \cdots - x_ny_n$ и неравенство $x_1 > 0$.

(ii) Если n можно представить в виде $n = m(m+1)/2$ с некоторым натуральным числом m, то пространство E_n можно отождествить с векторным пространством всех вещественных симметричных $m \times m$-матриц. В этом случае $S_m \subset E_n$ — конус всех положительно определенных вещественных симметричных матриц. Группу автоморфизмов $\Sigma = \Sigma(S_m)$ можно получить из полной вещественной линейной группы $GL(E_m)$: каждому невырожденному линейному преобразованию g на E_m отвечает автоморфизм $\rho = \rho_g$ конуса S_m, отображающий $x \in E_n$ в $\rho x = gxg^*$ (здесь g^* обозначает транспо-

нированное преобразование). Трубчатая область T_{S_m} над этим конусом известна как *обобщенная верхняя полуплоскость Зигеля* (когда $m = 1 = n$, это просто верхняя полуплоскость E_2^+).

(iii) Если n можно представить в виде $n = m^2$, то E_n можно отождествить с вещественным векторным пространством комплексных эрмитовых $m \times m$-матриц (т. е. комплексных $m \times m$-матриц x, совпадающих со своими эрмитово сопряженными матрицами x^*). В этом случае $H_m \subset E_n$ — конус всех положительно определенных комплексных эрмитовых $m \times m$-матриц. Группу $\Sigma\,(H_m)$ можно получить из полной комплексной линейной группы $GL\,(\mathbf{C}_m)$: каждому невырожденному линейному преобразованию g на $\mathbf{C}_m$ отвечает автоморфизм $\rho = \rho_g$ конуса H_m, отображающий $x \in E_n$ в $\rho x = gxg^*$, где g^* обозначает эрмитово сопряженное преобразование.

(iv) Если n можно представить в виде $n = 2m^2 - m$, то E_n можно отождествить с вещественным векторным пространством кватернионных эрмитовых $m \times m$-матриц. В этом случае $Q_m \subset E_n$ — конус всех положительно определенных кватернионных эрмитовых $m \times m$-матриц. Группу $\Sigma\,(Q_m)$ можно получить из полной кватернионной линейной группы, положив $\rho_g x = gxg^*$ для любого $x \in E_n$, где g^* — кватернионно сопряженная транспонированная матрица невырожденной кватернионной $m \times m$-матрицы g.

Ядра Коши и Пуассона, связанные с этими конусами, можно вычислить в явном виде. Пусть точка $x + iy$ лежит в трубчатой области T_{C_n}, основание которой есть световой конус будущего; тогда ядро Пуассона в этой точке принимает значение

$$\mathcal{P}(x, y) = c_n \frac{(y, y)^{n/2}}{\{[(x, x) - (y, y)]^2 + 4\,(x, y)^2\}^{n/2}} = c_n \frac{(y, y)^{n/2}}{|(x + iy, x + iy)|^n}.$$

Если $x + iy \in T_{S_m}$, то $\mathcal{P}(x, y) = a_n \{\det y / |\det (x + iy)|^2\}^{(n+1)/2}$. Для $x + iy \in T_{H_m}$ имеем $\mathcal{P}(x, y) = a_n' \{\det y / |\det (x + iy)|^2\}^n$. Каждому кватерниону $a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3 = (a_0 + ja_2) + i\,(a_1 + ja_3)$ соответствует 2×2-матрица над полем комплексных чисел

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

где $\alpha = (a_0 + ja_2)$, $\beta = (a_1 + ja_3)$. Это соответствие определяет изоморфизм между кватернионными эрмитовыми $m \times m$-матрицами x и $(2m) \times (2m)$-матрицами x' с комплексными элементами. В терминах этого соответствия для $x + iy \in T_{Q_m}$ имеем $\mathcal{P}(x, y) = a_n'' \{\det y' / |\det (x' + iy')|^2\}^{(2n-1)/2}$.

6.8. Приведенный в п. 6.6 результат для случая, когда Γ — первый октант, не справедлив для произвольного конуса. В самом деле,

несуженная сходимость интегралов Пуассона может отсутствовать даже для функций из $L^p(E_n)$, $p > 1$. Например, пусть $\Gamma = C_n$ (световой конус будущего), $n \geqslant 3$, и $1 \leqslant p < \infty$; тогда существует функция $f \in L^p(E_n)$, такая, что для почти всех $x \in E_n$

$$\limsup u(x, y) = \limsup \int_{E_n} \mathcal{P}(x - t, y) f(t)\, dt = \infty$$

при $y \in \Gamma$, стремящемся к 0 несуженным образом (см. Стейн и Н. Вейс [1]). Однако можно получить положительный результат, если ограничиться суженной сходимостью и взять в качестве основания Γ трубчатой области одну из областей положительности, описанных в п. 6.7. Действительно, если $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p$, то для почти всех $x \in E_n$ интеграл Пуассона $u(x, y)$ сходится к $f(x)$, когда $y \in \Gamma$ стремится к 0 суженным образом (см. Стейн и Н. Вейс [1]).

6.9. Классическое *преобразование Кэли* есть дробно-линейное преобразование $w = (z - i)/(z + i)$, отображающее верхнюю полуплоскость на единичный круг $|w| < 1$. Описанную в п. 6.7 (ii) верхнюю полуплоскость Зигеля, соответствующую конусу S_m, можно отобразить при помощи обобщенного преобразования Кэли на «круг» D, состоящий из комплексных симметричных $m \times m$-матриц w, таких, что $w^*w < I$, где I — единичная $m \times m$-матрица. Это отображение имеет вид $w = (z - iI)(z + iI)^{-1}$, где $z = x + iy \in T_{S_m}$. «Отмеченная граница», или «остов», $\{z = x + iy \in \mathbf{C}_n;\ y = 0\}$ соответствует при этом симметричным унитарным матрицам. Существуют подобные преобразования трубчатых областей над другими классическими областями, введенными в п. 6.7 (см. Бохнер [1], Пятецкий-Шапиро [1] и Кораньи и Вольф [1]). Образы трубчатых областей составляют важный подкласс *ограниченных симметричных областей* Картана (см. Хуа [1] и Хелгасон [1]).

6.10. Пусть D — множество комплексных $m \times m$-матриц w, удовлетворяющих неравенству $w^*w < I$. Можно рассматривать D как область в пространстве $\mathbf{C}_{m^2}$. Будем говорить, что комплекснозначная функция F принадлежит пространству $H^p(D)$, $p > 0$, если она голоморфна в D и $\int_U |F(\rho u)|^p\, du \leqslant M < \infty$ при $0 \leqslant \rho < 1$, где u пробегает унитарную группу U и du — элемент меры Хаара на этой группе. Можно показать, что при $F \in H^p(D)$, $p > 0$, (i) $\lim_{\rho \to 1} F(\rho u) = F(u)$ существует для почти всех $u \in U$ и (ii) $\int_U |F(\rho u) - F(u)|^p\, du \to 0$ при $\rho \to 1$. Подобное утверждение справедливо для произвольной круговой области Рейнхардта и, таким образом, для ограниченных симметричных областей Картана (см.

Бохнер [5]). Если D — *поликруг* $\{z=(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}_n;\ |z_j|<1,\ j=1, \ldots, n\}$, то пространство $H^p(D)$, $p>0$, состоит из всех голоморфных функций F, определенных в D и таких, что $\int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} |F(r_1e^{i\theta_1}, \ldots, r_ne^{i\theta_n})|^p\, d\theta_1 \ldots d\theta_n \leqslant M < \infty$ при $0 \leqslant r_j < 1$, $j=1, \ldots, n$. Аналогично, если D — шар $\{z=(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}_n;\ |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 1\}$, то пространство $H^p(D)$ состоит из всех голоморфных функций F, определенных в D и таких, что $\int\limits_{\partial D} |F(\rho z')|^2\, dz' \leqslant M < \infty$ при $0 \leqslant \rho < 1$, где границу ∂D множества D можно отождествить с единичной сферой Σ_{2n-1} в E_{2n}, при этом dz' — элемент площади. В этих случаях можно усилить утверждения (i) и (ii), включив некасательную сходимость к границе. Если D — поликруг, то приближение к границе может быть «несуженным», т. е. радиусы $r_1, \ldots, r_n$ могут стремиться к 1 независимо (подробнее см. Зигмунд [1] и [3]). См. также Кораньи [1].

6.11. Пусть D — область $\left\{z=(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}_n;\ \operatorname{Im} z_1 > \sum\limits_{j=2}^{n} |z_j|^2\right\}$. Отображение $z \to w = (w_1, \ldots, w_n)$, определяемое равенствами $w_1 = (z_1 - i)/(z_1+i)$, $w_j = 2z_j/(z_j+i)$, $j=2, \ldots, n$, переводит D в открытый единичный шар $\left\{w \in \mathbf{C}_n;\ \sum\limits_{j=1}^{n} |w_j|^2 < 1\right\}$ (когда $n=1$, это отображение есть преобразование Кэли). Общий класс областей, содержащий область D, а также трубчатые области над выпуклыми конусами, был введен Пятецким-Шапиро [1]; эти области были названы им *областями Зигеля второго рода* (см. также Кораньи [2]); H^p-теорию для таких областей, обобщающую теорему 5.1, можно найти в статье Стейна [6].

6.12. Трубчатые области над n-мерными кубами $Q=Q_n=\{y \in E_n;\ 0<y_j<1,\ j=1, \ldots, n\}$ обладают многими свойствами трубчатых областей над первым октантом. Например, для этих областей справедлив результат, аналогичный теореме 5.1: пусть $F \in H^p(T_Q)$, $p>0$, и y_0 — одна из вершин куба Q; тогда F имеет некасательный предел $F(x+iy_0)$ по каждой переменной для почти всех $x \in E_n$. В частности, $\lim\limits_{y \in Q;\, y \to y_0} F(x+iy) = F(x+iy_0)$ существует для почти всех $x \in E_n$. Кроме того, интеграл

$$\int\limits_{E_n} |F(x+iy) - F(x+iy_0)|^p\, dx$$

стремится к 0, когда $y \in Q$ стремится к y_0. Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.1. Роль верхней полуплоскости

играет полоса $\{z = x + iy \in \mathbf{C}_1;\ x \in E_1,\ 0 < y < 1\}$, а интеграл Пуассона функции f, определенной на границе этой области, дается формулой

$$u(x+iy) = \frac{1}{2}\sin \pi y \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{f(x-t)}{\operatorname{ch}\pi t - \cos \pi y} + \frac{f(x-t+i)}{\operatorname{ch}\pi t + \cos \pi y}\right] dt$$

(см. замечания после доказательства леммы 4.2 в гл. V). С помощью подходящего линейного преобразования можно обобщить этот результат на пространства H^p функций, определенных в трубчатых областях с основаниями в виде полиэдров. При этом получим следующее обобщение теоремы 5.5 (и теоремы 5.5′):

Пусть $F \in H^p(T_B)$, $p > 0$, где B — открытое выпуклое множество из E_n, а y_0 — точка на границе множества B; тогда суженные пределы

$$\lim_{y \to y_0, y \in B} F(x+iy) = F(x+iy_0)$$

существуют для почти всех $x \in E_n$ и, когда $y \in B$ стремится к y_0 суженным образом, $\int\limits_{E_n} |F(x+iy) - F(x+iy_0)|^p\, dx \to 0$.

6.13. В § 3 этой главы мы ввели ядро Пуассона, связанное с острым конусом $\Gamma \subset E_n$. Было использовано обобщение на n измерений соотношения между классическими ядрами Пуассона и Коши, связанными с верхней полуплоскостью (т. е. трубчатой областью, основание которой $\Gamma \subset E_1$ состоит из положительных чисел). Существуют другие соотношения такого рода. Вероятно, простейшим из них является следующее:

$$K(x+iy) = -\frac{1}{2\pi i(x+iy)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{y}{\pi(x^2+y^2)} + i\frac{x}{\pi(x^2+y^2)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{P(x, y) + iQ(x, y)\}.$$

Следовательно, $P(x, y) = 2\operatorname{Re}\{K(x+iy)\}$. Ядро $Q(x, y) = 2\operatorname{Im}\{K(x+iy)\}$ называется *сопряженным ядром Пуассона*. Руководствуясь этими соотношениями, можно рассматривать

$$P(x, y) = 2\operatorname{Re}\{K(x+iy)\} = 2\operatorname{Re}\left\{\int_{\Gamma^*} e^{2\pi i(x+iy)\cdot t} dt\right\}$$

и

$$Q(x, y) = 2\operatorname{Im}\{K(x+iy)\} = 2\operatorname{Im}\left\{\int_{\Gamma^*} e^{2\pi i(x+iy)\cdot t} dt\right\}$$

как обобщенные ядро Пуассона и сопряженное ядро Пуассона, связанные с острым конусом $\Gamma \subset E_n$. Например, если Γ — первый квадрант в E_2, то

$$P(x_1, x_2;\ y_1, y_2) = P(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \frac{y_1 y_2 - x_1 x_2}{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} .$$

В частности, мы видим, что $P(x, y)$ не обязательно будет положительным ядром. По этой и по ряду других причин это ядро не является удовлетворительным приближением единицы. Тем не менее его можно использовать вместе с $Q(x, y)$ для выяснения связи между вещественной и мнимой частями H^2-функций и их граничными значениями.

Пусть $\Gamma \subset E_n$ — острый выпуклый открытый конус; обозначим через χ^* характеристическую функцию сопряженного конуса Γ^* и через sgn^* *знак-функцию*, связанную с Γ^*: $\operatorname{sgn}^* t = 1$ при $t \in \Gamma^*$, $\operatorname{sgn}^* t = -1$ при $-t \in \Gamma^*$ и $\operatorname{sgn}^* t = 0$ в остальных случаях. Из приведенных выше определений непосредственно следует, что

$$P(x, y) = \int_{E_n} e^{2\pi i x \cdot t} e^{-2\pi |y \cdot t|} [\chi^*(t) + \chi^*(-t)]\, dt,$$

$$Q(x, y) = -i \int_{E_n} e^{2\pi i x \cdot} e^{-2\pi |y \cdot t|} [\chi^*(t) - \chi^*(-t)]\, dt =$$

$$= -i \int_{E_n} e^{2\pi i x \cdot t} e^{-2\pi |y \cdot t|} \operatorname{sgn}^* t\, dt.$$

Таким образом, $\hat{P}_y(t) = [\chi^*(t) + \chi^*(-t)]\, e^{-2\pi |y \cdot t|}$ и $\hat{Q}_y(t) = (-i \operatorname{sgn}^* t)\, e^{-2\pi |y \cdot t|}$ для всех $y \in \Gamma$ удут значениями преобразований Фурье функций $P_y = P(\cdot, y)$ и $Q_y = Q(\cdot, y)$.

Предположим теперь, что $F = u + iv \in H^2(T_\Gamma)$. В силу следствия 3.4, существуют граничные значения $\lim\limits_{y \in \Gamma, y \to 0} F(x + iy) = u(x) + iv(x)$ в L^2-смысле. Нетрудно доказать следующие утверждения:

(i) *для всех* $z \in T_\Gamma$ *имеем* $F(z) = \int_{E_n} 2K(z - \xi)\, u(\xi)\, d\xi$;

(ii) $v(z) = v(x + iy) = \int_{E_n} Q(x - \xi, y)\, u(\xi)\, d\xi$, *когда* $z \in T_\Gamma$, *причем граничные значения* $v(x)$ *и* $u(x)$ *удовлетворяют соотношению* $\hat{v}(t) = (-i \operatorname{sgn}^* t)\, \hat{u}(t)$;

(iii) *вещественнозначная функция* $u \in L^2(E_n)$ *является вещественной частью граничного значения в* L^2-*смысле* $F(x) = \lim\limits_{y \in \Gamma, y \to 0} F(x + iy)$ *функции* $F \in H^2(T_\Gamma)$ *тогда и только тогда, когда* $\hat{u}(t)$ *об-*

ращается в 0 *почти всюду вне* $\Gamma^* \cup (-\Gamma^*)$, *где* $-\Gamma^* = \{t \in E_n;\ -t \in \Gamma^*\}$.

Первая часть утверждения (ii) немедленно получается из равенства (i) приравниванием мнимых частей. После этого, взяв преобразование Фурье и перейдя к пределу при $y \to 0$, $y \in \Gamma$, получим вторую часть. Если $u \in L^2(E_n)$ есть вещественная часть граничного значения некоторой функции $F \in H^2(T_\Gamma)$, то из (i) и определения ядра Коши имеем

$$F(z) = 2\int_{E_n} K(z-\xi)\,u(\xi)\,d\xi = 2\int_{\Gamma^*} \hat{u}(t)\,e^{2\pi i z\cdot t}dt$$

для всех $z \in T_\Gamma$. Отметим, что определенная таким образом функция F во всяком случае принадлежит пространству $H^2(T_\Gamma)$ (это следует из теоремы 3.1) и ее вещественная часть $u_y(x) = u(x+iy)$ равна $\int\limits_{E_n} P(x-\xi, y)\,u(\xi)\,d\xi$, так что, взяв преобразование Фурье, получим

$$\hat{u}_y(t) = e^{-2\pi|y\cdot t|}\,(\chi^*(t) + \chi^*(-t))\,\hat{u}(t).$$

Утверждение (iii) есть непосредственное следствие этого равенства. Утверждение (i) получается сложением левых и правых частей равенств

$$F(z) = \int_{E_n} K(z-\xi)\,F(\xi)\,d\xi \quad \text{и} \quad 0 = \int_{E_n} K(z-\xi)\,\overline{F(\xi)}\,d\xi.$$

Первое из этих равенств вытекает из теоремы 3.6. Второе есть простое следствие теоремы 3.1 и определения ядра Коши.

6.14. В случае когда $n = 1$ и Γ — положительная полуось, каждая вещественнозначная функция $u \in L^2(E_1) = L^2(-\infty, \infty)$ есть вещественная часть граничного значения некоторой функции $F = u + iv \in H^2(E_2^+)$. Это непосредственно следует из 6.13 (iii) и соотношения $\Gamma^* \cup (-\Gamma^*) = (-\infty, \infty) = E_1$. Из (ii) и теоремы Планшереля следует, что отображение $u \to v$ определено и является изометрией на $L^2(E_1)$ (в действительности это есть унитарное преобразование). Оно называется *преобразованием Гильберта.* Позднее, в § 2 гл. V, будет показано, что преобразование Гильберта можно определить на $L^p(E_1)$ и что оно будет ограниченным линейным преобразованием в $L^p(E_1)$ $(1 < p < \infty)$. Это утверждение эквивалентно тому, что найдется такая постоянная $A_p < \infty$, что если $u + iv$ — граничное значение функции $F \in H^p(E_2^+)$, то

$$\|v\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |v(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant A_p\left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = A_p\|u\|_p.$$

Это неравенство известно как неравенство М. Рисса. Этот одномерный результат можно обобщить на n измерений:

Пусть $F = u + iv \in H^p(T_\Gamma)$, $1 < p < \infty$, где Γ — открытый выпуклый конус в E_n; тогда существует постоянная $A_p < \infty$, такая, что для $y \in \Gamma$ и $y = 0$ (это граничное значение понимается в смысле теоремы 5.6*) справедливо неравенство*

$$\left(\int_{E_n} |v(x+iy)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant A_p \left(\int_{E_n} |u(x+iy)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Поворотом системы координат доказательство сводится к случаю, когда луч $(\eta_1, 0, \ldots, 0)$, $\eta_1 > 0$, лежит в конусе Γ. Пусть $y \in \Gamma$ фиксировано и $\eta = (\eta_1, 0, \ldots, 0)$, $\eta_1 > 0$; тогда $y + \eta \in \Gamma$ и, в силу одномерного результата,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(x_1 + iy_1 + i\eta_1, \ldots, x_n + iy_n)|^p\,dx_1 \leqslant$$
$$\leqslant A_p^p \int_{-\infty}^{\infty} |u(x_1 + iy_1 + i\eta_1, \ldots, x_n + iy_n)|^p\,dx_1.$$

Интегрируя обе части по переменным $x_2, \ldots, x_n$ и устремляя $\eta_1 \to 0$, получим искомое неравенство. Случай $y = 0$ получается отсюда предельным переходом, когда $y \in \Gamma$, $y \to 0$.

6.15. Пусть K — открытое выпуклое множество, не содержащее ни одной прямой. Пусть $p \notin K$, и пусть Γ — конус, порожденный точкой p и множеством K. Тогда Γ не содержит ни одной прямой. Чтобы убедиться в этом, предположим сначала, что $n = 2$. Рассмотрим опорные прямые множества K. Либо они все параллельны (и это означает, что K содержит прямую), либо найдутся две опорные прямые, пересекающиеся под острым углом. Их пересечение определяет конус Γ_0, содержащий K и такой, что ни одна прямая не лежит целиком в Γ_0. Требуемое свойство конуса Γ теперь очевидно. Предположим далее, что $n > 2$ и l — прямая, целиком лежащая в Γ. Пусть π — плоскость, содержащая l и p, и пусть $K' = K \cap \pi$, $\Gamma' = \Gamma \cap \pi$. Тогда K' открыто, выпукло и не содержит ни одной прямой, а конус Γ', порожденный множеством K' и точкой p, содержит прямую l, что противоречит уже доказанному случаю $n = 2$.

6.16. [Авторы не затрагивают преобразования Фурье — Лапласа обобщенных функций и обобщенные граничные значения, весьма важные теоретически, а также с точки зрения математической физики. См. Л. Шварц [2], Владимиров [1], гл. V.— *Перев.*]

Библиографические замечания

Основные результаты классической теории пространств H^p можно найти в книге Зигмунда [1], гл. VII. Теория пространств H^2 над трубчатыми областями впервые изучалась Бохнером, которому принадлежит основной результат — теорема 2.3 (Бохнер [8]). Многие результаты, включенные в §§ 2, 3 и 5, имеются в работе: Стейн, Вейс и Вейс [1]. Ядро Коши, связанное с выпуклым конусом, было введено Бохнером [1]; кроме того, он вычислил это ядро в явном виде для конусов, соответствующих классическим областям[1]). Другие обобщения теоремы Пэли — Винера на n измерений получены Планшерелем и Пойа [1] и Стейном [1]. Понятие криволинейной суженной сходимости, описанное в п. 6.5, было введено Кальдероном и Зигмундом [1]. Основные результаты, касающиеся преобразования Гильберта, содержатся в книгах Титчмарша [2] и Зигмунда [1]. В качестве ранних работ по H^p-теории нескольких комплексных переменных можно назвать: Бохнер [2], Зигмунд [3] и Бохнер [5]. Введение в теорию выпуклых множеств см. у Валентайна [1] и Рокафеллара [1].

---

[1]) Ядро Коши — Бохнера для трубчатых конусов подробно изучено Владимировым [2, 3, 4]. Он обобщил результаты Бохнера [1] на важные классы голоморфных функций, имеющих обобщенные граничные значения.— *Прим. перев.*

Глава IV

СВОЙСТВА СИММЕТРИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Преобразование Фурье тесно связано с действием группы сдвигов на евклидовом пространстве. Если бы мы ограничились только вопросами, связанными с этой структурой, то смогли бы привести мало результатов, которые нельзя найти в курсах абстрактного гармонического анализа на локально компактных абелевых группах, и в то же время потеряли бы большую часть элегантной общности последнего. Гармонический анализ на евклидовых пространствах на самом деле богаче благодаря его связи с несколькими классами преобразований: растяжениями и вращениями наряду со сдвигами. Эта связь уже проявилась неявным образом при изучении гармонических и голоморфных функций. Теперь мы хотим представить в явном виде дальнейшую связь преобразования Фурье с растяжениями и вращениями.

Исходным пунктом будет замечание, что преобразование Фурье имеет очень простой закон преобразования при растяжениях и, кроме того, коммутирует с вращениями. Второе свойство приводит к разложению пространства $L^2(E_n)$ в прямую сумму подпространств, каждое из которых особым образом преобразуется под действием вращений. Преобразование Фурье сохраняет эту прямую сумму, и его сужение на каждое из этих подпространств можно отождествить с классическим преобразованием Бесселя. Это разложение можно получить переходом к сферическим координатам, который позволяет сначала разложить пространства L^2-функций, определенных на единичной сфере в E_n. Последнее разложение получается при помощи сужения на единичную сферу однородных гармонических многочленов. Изучение этих функций — сферических гармоник — в свете приведенных рассуждений очень естественно, так как лапласиан инвариантен одновременно относительно сдвигов и вращений, тогда как однородность этих полиномов отражает действие растяжений.

Эта глава устроена следующим образом. Первый параграф посвящен частному двумерному случаю, который особенно прост, так как разложение пространства L^2 на единичной сфере при этом сводится к обычному разложению квадратично-интегрируемых функций в ряд Фурье. Во втором параграфе эти разложения обобщаются на n измерений при помощи развитой там теории сферических гармоник. Третий параграф начинается с изучения пространства радиальных функций — простейшего из слагаемых, возникающих в упомянутом выше разложении пространства $L^2(E_n)$, а затем рассматриваются остальные слагаемые в этом разложении. Четвертый параграф посвящен некоторым применениям этой теории, включая несколько важных тождеств теории потенциала и сингулярных интегралов, где очевидным образом проявляется роль растяжений и вращений.

1. Разложение пространства $L^2(E_2)$ на подпространства, инвариантные относительно преобразования Фурье

Наша главная цель в этой главе — изучить возможно подробнее действие преобразования Фурье на функции, определенные в E_n. Для этого будет найдено естественное разложение пространства $L^2(E_n)$ в прямую сумму подпространств, сохраняющееся при пре-

образованиях Фурье, и затем детально изучено, как последнее действует на каждом слагаемом. В этой связи нам придется изложить основные свойства функций Бесселя и сферических гармоник. Они имеют фундаментальное значение не только для вопросов гармонического анализа, но и для многих других областей анализа.

В одномерном случае имеется простое и естественное разложение пространства $L^2(E_1)$. Легко заметить, что подпространства четных и нечетных функций инвариантны относительно преобразования Фурье, ортогональны одно другому и их прямая сумма образует все пространство $L^2(E_1)$. Эти свойства, получаемые разложением функции f в сумму $f = f_ч + f_н$, где *четная часть* $f_ч$ определяется равенством $f_ч(x) = [f(x) + f(-x)]/2$, а *нечетная часть* $f_н$ — равенством $f_н(x) = [f(x) - f(-x)]/2$, очевидно, сохраняются и для n измерений. Гораздо более интересная, хотя и более сложная ситуация возникает, если рассмотреть следующее обобщение четной части функции на n измерений. Для данной локально интегрируемой на E_n функции f ее *радиальной частью* называется функция φ, определяемая равенством

$$\varphi(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} f(rx')\, dx',$$

где $r = |x|$, $x' = x/r$ (при $x \neq 0$) и ω_{n-1} — площадь единичной сферы Σ_{n-1} в E_n. Ясно, что φ — *радиальная функция,* т. е. φ зависит только от $r = |x|$. Когда $n = 1$, то, очевидно, $\varphi = f_ч$.

Это понятие, естественное, когда рассмотрения ведутся в полярных координатах, полезно также при изучении действия преобразования Фурье. Это подтвердят следующие замечания, из которых станет ясно, что преобразование Фурье радиальной функции есть также радиальная функция. Заметим сначала, что функция f, определенная на E_n, будет радиальной тогда и только тогда, когда $f(\rho x) = f(x)$ для всех ортогональных преобразований[1] ρ пространства E_n и для всех $x \in E_n$. Основное свойство преобразования Фурье относительно ортогональных преобразований выражает следующая

Теорема 1.1. *Преобразование Фурье $\mathscr{F}$ коммутирует с ортогональными преобразованиями. Именно, пусть ρ — некоторое ортогональное преобразование; обозначим через R_ρ отображение, переводящее функцию f, определенную на E_n, в функцию g, определяемую равенством $g(x) = (R_\rho f)(x) = f(\rho x)$, $x \in E_n$; тогда для*

---

[1] Напомним, что ρ — *ортогональное преобразование*, если ρ — линейный оператор в E_n, сохраняющий скалярное произведение: $\rho x \cdot \rho y = x \cdot y$ для всех $x, y \in E_n$. Если $\det \rho = 1$, то ρ называется *вращением*. При $n > 1$ также верно, что f радиальна тогда и только тогда, когда $f(\rho x) = f(x)$ для всех вращений ρ и всех $x \in E_n$.

любой функции $f \in L^1(E_n)$

$$\hat{g}(t) = (\mathcal{F} g)(t) = (\mathcal{F} R_\rho f)(t) = (R_\rho \mathcal{F} f)(t) = (\mathcal{F} f)(\rho t) = \hat{f}(\rho t);$$

иначе говоря, операторы $\mathcal{F}$ *и* R_ρ *коммутируют:* $\mathcal{F} R_\rho = R_\rho \mathcal{F}$.

Доказательство. Так как сопряженное к ρ преобразование совпадает с его обратным и при замене переменных $w = \rho x$ якобиан равен 1, имеем

$$\hat{g}(t) = \int_{E_n} e^{-2\pi i t \cdot x} f(\rho x)\,dx = \int_{E_n} e^{-2\pi i t \cdot \rho^{-1} w} f(w)\,dw =$$

$$= \int_{E_n} e^{-2\pi i \rho t \cdot w} f(w)\,dw = \hat{f}(\rho t).$$

Так как для любых точек $x_1,\ x_2 \in E_n$, таких, что $|x_1| = |x_2|$, найдется ортогональное преобразование ρ, такое, что $\rho x_1 = x_2$, то из приведенного свойства преобразования Фурье получаем уже упоминавшееся

Следствие 1.2. *Пусть* f *— радиальная функция из* $L^1(E_n)$; *тогда* $\hat{f}$ *— также радиальная функция.*

Это утверждение очевидным образом обобщается на $L^2(E_n)$. Рассмотрев подпространство $\mathfrak{H}^0 \in L^2(E_n)$ почти всюду радиальных функций и его ортогональное дополнение, получим разложение $L^2(E_n)$ в прямую сумму, инвариантное относительно преобразования Фурье (это есть непосредственное следствие теоремы Планшереля). Естественно спросить: существует ли простое описание пространства функций, ортогональных к радиальным, и можно ли получить более подробную информацию о действии преобразования Фурье на этом подпространстве? Рассмотрим эти вопросы сначала в двумерном случае.

Выберем функцию $f \in L^2(E_2)$ и используем стандартное отождествление точек (x, y) из E_2 с комплексными числами $x + iy = z = re^{i\theta}$. Из теоремы Фубини следует, что $f(re^{i\theta})$ есть квадратично-интегрируемая функция переменной θ для почти всех r. Следовательно, имеем разложение в ряд Фурье

$$f(re^{i\theta}) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(r)\, e^{ik\theta}, \tag{1.3}$$

сходящееся к $f(re^{i\theta})$ по L^2-норме для почти всех r. Кроме того, $\sum_{-\infty}^{\infty} |f_k(r)|^2 = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\,d\theta$ почти всюду, откуда, в силу тео-

ремы Лебега о монотонной сходимости,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \sum_{-n}^{n} |f_k(r)|^2\, rdr = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left\{\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta\right\} rdr = \frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2.$$

Полагая $g_k(z) = f_k(r)\, e^{ik\theta}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_2} |f(z) - \sum_{-n}^{n} g_k(z)|^2\, dz =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta\right\} - \sum_{-n}^{n} |f_k(r)|^2\right] rdr = 0.$$

Это вместе с соотношениями ортогональности для экспоненциальных функций $e^{ik\theta}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, означает, что имеет место разложение в прямую сумму

$$L^2(E_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \oplus\, \mathfrak{H}^k \text{ [1]}, \tag{1.4}$$

где $\mathfrak{H}^k = \Big\{g \in L^2(E_2);\ g(z) = f(r)\, e^{ik\theta}$ почти всюду для некоторой измеримой функции $f(r)$, удовлетворяющей оценке $\int_0^\infty |f(r)|^2\, rdr < \infty\Big\}$. Это обозначение согласуется с введенным выше, так как в обоих случаях $\mathfrak{H}^0$ — пространство квадратично-интегрируемых почти всюду радиальных функций. Более того, из разложения (1.4) следует, что ортогональное дополнение к $\mathfrak{H}^0$ совпадает с прямой суммой подпространств $\mathfrak{H}^k$, $k \neq 0$.

Мы знаем, что преобразование Фурье отображает $\mathfrak{H}^0$ в себя. Легко видеть, что оно отображает каждое из остальных пространств $\mathfrak{H}^k$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, также в себя. Предположим сначала, что $g \in \mathfrak{H}^k \cap L^1(E_2)$, и положим $h(z) = g(e^{i\varphi}z)$ для некоторого фиксированного φ. Тогда $h(z) = e^{ik\varphi}g(z)$ для почти всех z. С другой стороны, умножение на $e^{i\varphi}$ есть вращение пространства E_2, и, поскольку преобразования Фурье коммутируют с вращениями (теорема 1.1), имеем

$$\hat{g}(e^{i\varphi}w) = \hat{h}(w) = e^{ik\varphi}\hat{g}(w)$$

---

[1] Говоря о прямой сумме, мы имеем в виду, что все подпространства $\mathfrak{H}^k$ замкнуты в $L^2(E_2)$, попарно ортогональны и замыкание их линейной оболочки совпадает со всем пространством $L^2(E_2)$.

для всех w и φ. Положив $w = r \geqslant 0$, видим, что $\hat{g}$ также принадлежит $\mathfrak{H}^k$. Так как $\mathfrak{H}^k \cap L^1(E_2)$ плотно в $\mathfrak{H}^k$, то отсюда следует, что все подпространство $\mathfrak{H}^k$ отображается преобразованием Фурье в себя. В силу теоремы Планшереля, отсюда следует, что каждое из пространств $\mathfrak{H}^k$ отображается на себя.

Таким образом, мы нашли разложение (1.4) пространства $L^2(E_2)$ в прямую сумму подпространств, инвариантных относительно преобразования Фурье. Это есть ответ на первый вопрос. Для того чтобы ответить на второй, придется заняться более подробным изучением действия преобразования Фурье на каждом из подпространств $\mathfrak{H}^k$.

Выберем функцию $f \in \mathfrak{H}^k$; тогда f имеет вид $f(x) = f_0(r)e^{ik\theta}$ для почти всех $z = re^{i\theta}$. Поскольку $\hat{f}$ также принадлежит $\mathfrak{H}^k$, она имеет аналогичный вид, т. е. $\hat{f}(w) = F_0(R)e^{ik\varphi}$ для почти всех $w = Re^{i\varphi}$. Предполагая функцию f интегрируемой, вычислим F_0 явно (результаты очевидным образом обобщаются на квадратично-интегрируемые функции f). Полагая $w = Re^{i0} = R$, имеем

$$F_0(R) = \hat{f}(Re^{i0}) = \int_0^\infty f_0(r)\left\{\int_0^{2\pi} e^{-2\pi iRr\cos\theta}e^{ik\theta}d\theta\right\}rdr =$$

$$= (-i)^k 2\pi \int_0^\infty f_0(r)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\pi iRr\sin\theta}e^{-ik\theta}d\theta\right\}rdr.$$

Таким образом, явное выражение для $F_0(R)$ в терминах функции f_0 содержит коэффициенты Фурье функции переменной θ вида $e^{it\sin\theta}$. Эти коэффициенты, зависящие от t, известны как *функции Бесселя* $J_k(t)$. Выражение

$$J_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{it\sin\theta}e^{-ik\theta}d\theta$$

определяет функцию Бесселя J_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Простой заменой переменных получим соотношение, справедливое для всех целых k:

$$J_k(t) = (-1)^k J_{-k}(t). \tag{1.5}$$

Следовательно, главный результат о действии преобразования Фурье на пространствах $\mathfrak{H}^k$ можно сформулировать так:

Теорема 1.6. *Пусть $f \in L^1(E_2)$ и $f(z) = f_0(r)e^{ik\theta}$, где $z = re^{i\theta}$; тогда $\hat{f}(w) = F_0(R)e^{ik\varphi}$, где $w = Re^{i\varphi}$ и $F_0(R) = 2\pi i^k \times \int_0^\infty f_0(r)J_{-k}(2\pi Rr)\,rdr = 2\pi(-i)^k\int_0^\infty f_0(r)J_k(2\pi Rr)\,rdr$.*

2. Сферические гармоники

Для того чтобы обобщить это разложение на n измерений, желательно уметь представлять функции, определенные на единичной сфере, в виде разложений, подобных рядам Фурье. Это позволит нам получить для $f(x) = f(rx')$ представление, аналогичное представлению (1.3). Покажем, что это можно сделать, взяв вместо экспонент $e^{ik\theta}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, класс функций, называемых *сферическими гармониками*. Прежде чем определить эти функции, сделаем несколько простых замечаний о тригонометрических рядах $s(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}$.

Будем рассматривать такой ряд как последовательность *симметричных частичных сумм* $s_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta} = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k e^{ik\theta} + c_{-k} e^{-ik\theta})$. Эти суммы вещественны при $c_k = \bar{c}_{-k}$. В этом случае $s_n(\theta)$ есть сужение на единичную окружность Σ_1 вещественной части $u_n(z)$ многочлена $p_n(z) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{n} c_k z^k$, $z = re^{i\theta} \in \mathbf{C}_1$. Поскольку на комплексные коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ и вещественный коэффициент c_0 не наложено никаких ограничений, $u_n(z) = u_n(x + iy)$ — произвольный вещественный гармонический многочлен степени n вещественных переменных x и y. При этом слагаемые c_0, $\mathrm{Re}\{c_k z^k\} = q_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — произвольные однородные[1] вещественные гармонические многочлены степени 0, k. Таким образом, линейные комбинации $Y^{(k)}(e^{i\theta}) = c_k e^{ik\theta} + \bar{c}_k e^{-ik\theta} = a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta$, где $c_k = (a_k - ib_k)/2$, являются в точности сужениями на единичную окружность $|z| = 1$ таких многочленов $q_k(z) = q_k(re^{i\theta})$. В частности, поскольку каждую вещественнозначную L^2-функцию, определенную на единичной окружности, можно разложить в сходящийся (в L^2-смысле) ряд Фурье, члены которого являются подобными сужениями, видим, что $L^2(\Sigma_1)$ есть замыкание линейной оболочки множества таких функций $Y^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$.

В общем случае сужение на единичную сферу Σ_{n-1} однородного гармонического многочлена степени k называется *сферической гармоникой степени* k. Этот параграф посвящен выяснению важных свойств сферических гармоник. Это позволит нам, в частности, показать, как пространство $L^2(E_n)$ можно разложить в прямую сумму, аналогичную (1.4), со слагаемыми $\mathfrak{H}_k$, состоящими из подпространств $L^2(E_n)$, порожденных произведениями радиальных

---

[1] Функция f, определенная на E_n, называется *однородной степени* k, если $f(ax) = a^k f(x)$ для всех $x \in E_n$ и $a > 0$.

функций на сферические гармоники степени k[1]. Преобразование Фурье отображает эти пространства $\mathfrak{H}_k$ на себя. Подробно описав действие преобразования Фурье на каждом из них, мы получим обобщение теоремы 1.6.

Пусть $\mathcal{P}_k$ — множество всех однородных многочленов степени k с комплексными коэффициентами, определенных на E_n. Если $P \in \mathcal{P}_k$, то

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha,$$

где (как и в гл. I) $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс (из неотрицательных целых чисел), $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ и $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$. Ясно, что одночлены x^α, $|\alpha| = k$, образуют базис этого пространства. С другой стороны, число таких одночленов равно числу d_k различных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, таких, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k$. Нетрудно вычислить d_k. Выберем наудачу $n - 1$ ящиков из линейно упорядоченного набора $n + k - 1$ ящиков и положим в каждый из оставшихся k ящиков один шар. Тогда перед первым выбранным ящиком будет α_1 шаров, между первым и вторым выбранными ящиками будет α_2 шаров, и т. д.; за последним ящиком будет α_n шаров. Таким образом мы получим n неотрицательных целых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, удовлетворяющих равенству $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k$, причем все допустимые мультииндексы можно получить таким путем. Следовательно, число подобных мультииндексов в точности равно числу способов выбора $n - 1$ ящиков из общего числа $n + k - 1$. Значит, размерность $\mathcal{P}_k$ равна

$$d_k = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}.$$

Введем скалярное произведение $\langle P, Q\rangle$ на $\mathcal{P}_k$, положив $\langle P, Q\rangle = P(D)\,\overline{Q}$ для всех $P, Q \in \mathcal{P}_k$, где $P(D)$ — дифференциальный оператор, введенный в гл. I (см. (1.9)). Поскольку P и Q — однородные многочлены одинаковой степени, $\langle P, Q\rangle$ принимает скалярные значения; кроме того, оно, очевидно, линейно по первой переменной, антилинейно по второй и эрмитово симметрично. Для того чтобы проверить, что введенное определение действительно дает скалярное произведение, достаточно, следовательно, показать, что $\langle P, P\rangle \geqslant 0$, причем $\langle P, P\rangle = 0$ только при $P = 0$. Но если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, то

$$\left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}\right) x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} = 0,$$

---

[1] При $n = 2$ пространства $\mathfrak{H}_k$ порождаются пространствами $\mathfrak{H}^k$ и $\mathfrak{H}^{-k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

в то время как эта производная равна $\alpha_1! \ldots \alpha_n! = \alpha!$ при $\alpha = \beta$. Следовательно, если $P(x) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha$, то $\langle P, P\rangle = \sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^2 \alpha!$. Но последнее выражение равно 0 только тогда, когда все коэффициенты c_α равны 0.

Используем это скалярное произведение для доказательства следующего основного результата:

Теорема 2.1. *Пусть* $P \in \mathcal{P}_k$; *тогда*

$$P(x) = P_0(x) + |x|^2 P_1(x) + \cdots + |x|^{2l} P_l(x),$$

где P_j — *однородные гармонические многочлены степени* $k-2j$, $j = 0, \ldots, l$.

Доказательство. Любой многочлен степени меньше 2 гармонический, поэтому будем считать, что $k \geqslant 2$. Рассмотрим линейное отображение $\varphi\colon \mathcal{P}_k \to \mathcal{P}_{k-2}$, определяемое равенством $\varphi(P) = \Delta P$, $P \in \mathcal{P}_k$, где Δ — оператор Лапласа. Покажем сначала, что φ отображает $\mathcal{P}_k$ на $\mathcal{P}_{k-2}$. Если бы это было не так, то нашелся бы ненулевой многочлен $Q \in \mathcal{P}_{k-2}$, ортогональный к множеству $\mathfrak{R}(\varphi)$ — области значений отображения φ, т. е.

$$\overline{\langle \Delta P, Q\rangle} = \langle Q, \Delta P\rangle = 0$$

для всех $P \in \mathcal{P}_k$. В частности, это должно быть верно для $P(x) = |x|^2 Q(x)$. Тогда

$$0 = \langle Q, \Delta P\rangle = Q(D)\,\overline{\Delta P} = \Delta Q(D)\,\overline{P} = P(D)\,\overline{P} = \langle P, P\rangle.$$

Но это невозможно, поскольку $P \not\equiv 0$.

Пусть $\mathcal{A}_j \subset \mathcal{P}_j$, $j \geqslant 2$, — класс всех гармонических многочленов из $\mathcal{P}_j$. Тогда $\mathcal{P}_j$ есть прямая сумма ортогональных подпространств $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{B}_j = |x|^2 \mathcal{P}_{j-2} = \{P(x) \in \mathcal{P}_j;\ P(x) = |x|^2 Q(x),\ Q(x) \in \mathcal{P}_{j-2}\}$. Действительно, если $R(x) = |x|^2 Q(x)$, где $Q \in \mathcal{P}_{j-2}$, то $\langle R, P\rangle = 0$ для всех $Q \in \mathcal{P}_{j-2}$ тогда и только тогда, когда $Q(D) \times \Delta\overline{P} = 0$ для всех $Q \in \mathcal{P}_{j-2}$, что верно тогда и только тогда, когда $\langle Q, \Delta P\rangle = 0$ для всех $Q \in \mathcal{P}_{j-2}$, а это в свою очередь верно тогда и только тогда, когда $\Delta P = 0$.

В частности, при $j = k$ и $P \in \mathcal{P}_k$ имеем $P(x) = P_0(x) + |x|^2 Q(x)$, где P_0 — гармонический многочлен, а $Q \in \mathcal{P}_{k-2}$. Применяя полученный результат к $j = k-2$, найдем разложение $Q(x) = P_1(x) + |x|^2 Q_1(x)$, где P_1 — гармонический многочлен, а $Q_1 \in \mathcal{P}_{k-4}$. Итак, $P(x) = P_0(x) + |x|^2 P_1(x) + |x|^4 Q_1(x)$. Отсюда теорема следует по индукции.

Из теоремы 2.1 непосредственно вытекает

Следствие 2.2. *Сужение на единичную сферу Σ_{n-1} любого многочлена n переменных есть сумма сужений на Σ_{n-1} гармонических многочленов* [1].

Обозначим через $\mathcal{H}_k$ пространство сферических гармоник степени k. Оно совпадает с множеством сужений на Σ_{n-1} всех элементов из $\mathcal{A}_k$. Рассмотрим сужение Y многочлена P из $\mathcal{A}_k$ (при $x' \in \Sigma_{n-1}$, $Y(x') = P(x')$); тогда, в силу однородности P, $P(x) = |x|^k Y(x/|x|)$ для $x \neq 0$. Поэтому отображение сужения $P \to Y$ имеет тривиальное ядро и, следовательно, является изоморфизмом $\mathcal{A}_k$ на $\mathcal{H}_k$. В частности,

$$\dim \mathcal{H}_k = \dim \mathcal{A}_k = \dim \mathcal{P}_k - \dim \mathcal{P}_{k-2} = d_k - d_{k-2} = \binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-3}{k-2}$$

для $k \geqslant 2$. Кроме того, $\dim \mathcal{H}_0 = d_0 = 1$ и $\dim \mathcal{H}_1 = d_1 = n$. В начале этого параграфа было показано, что в случае $n = 2$ пространство $\mathcal{H}_k$ порождается двумя функциями $\cos k\theta$ и $\sin k\theta$, и потому $\dim \mathcal{H}_k = 2$ для всех $k \geqslant 1$. Это согласуется с только что полученным результатом:

$$\binom{2+k-1}{k} - \binom{k-1}{k-2} = (k+1) - (k-1) = 2.$$

При $n = 3$ получим $\dim \mathcal{H}_k = 2k + 1$ при $k \geqslant 0$.

Пространство $\mathcal{A}_k$ называется *пространством пространственных сферических гармоник*. Иногда, чтобы подчеркнуть различие между $\mathcal{H}_k$ и $\mathcal{A}_k$, элементы $\mathcal{H}_k$ называют *поверхностными сферическими гармониками*.

Следствие 2.3. *Множество всех конечных линейных комбинаций элементов из* $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$

(i) *плотно в пространстве всех непрерывных на Σ_{n-1} функций по L^∞-норме;*

(ii) *плотно в $L^2(\Sigma_{n-1})$.*

Доказательство. Так как пространство непрерывных функций плотно в $L^2(\Sigma_{n-1})$, то легко видеть, что из (i) следует (ii). Пусть заданы $\varepsilon > 0$ и $f \in L^2(\Sigma_{n-1})$; выберем непрерывную функцию g, такую, что $\|f - g\|_2 < \varepsilon/2$. Если (i) верно, то суще-

[1] Отметим, что при $n = 2$ этот факт легко следует из замечаний, сделанных в начале этого параграфа.

ствует конечная линейная комбинация h элементов из $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$, такая, что $\|g-h\|_\infty < \varepsilon/(2\sqrt{\omega_{n-1}})$. Тогда $\|f-h\|_2 \leqslant \|f-g\|_2 + \|g-h\|_2 < \varepsilon/2 + \sqrt{\omega_{n-1}}\,\|g-h\|_\infty < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

С другой стороны, (i) следует из теоремы Вейерштрасса об аппроксимации: если функция g непрерывна на Σ_{n-1}, то ее можно равномерно приблизить многочленами, суженными на Σ_{n-1}. Но, в силу (2.2), эти сужения являются конечными линейными комбинациями элементов из $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$.

Следствие 2.4. *Пусть $Y^{(k)}$ и $Y^{(l)}$ — сферические гармоники степени k и l соответственно, причем $k \neq l$; тогда*

$$\int\limits_{\Sigma_{n-1}} Y^{(k)}(x')\,Y^{(l)}(x')\,dx' = 0.$$

Доказательство. Для $x \neq 0$ из E_n положим $r = |x|$ и $x' = x/r$. Определим тогда $u(x) = r^k Y^{(k)}(x')$ и $v(x) = r^l Y^{(l)}(x')$ для $x \neq 0$ и положим $u(0) = v(0) = 0$, если ни k, ни l не равны 0; если же, скажем, $k = 0$, то $Y^{(k)}$ — постоянная, и мы положим $u(0)$ равной этой постоянной. Производные функций u и v в точке $x' \in \Sigma_{n-1}$ в направлении внешней нормали к Σ_{n-1} равны $(dr^k/dr) \times Y^{(k)}(x') = kY^{(k)}(x')$ и $(dr^l/dr)\,Y^{(l)}(x') = lY^{(l)}(x')$. Кроме того, так как $Y^{(k)}$ и $Y^{(l)}$ — (поверхностные) сферические гармоники, то u и v — пространственные сферические гармоники. Таким образом, в силу теоремы Грина,

$$0 = \int\limits_{|x|\leqslant 1} (u\Delta v - v\Delta u)\,dx = \int\limits_{\Sigma_{n-1}} \left(u\frac{\partial v}{\partial r} - v\frac{\partial u}{\partial r}\right) dx' =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_{n-1}} (lY^{(k)}(x')\,Y^{(l)}(x') - kY^{(k)}(x')\,Y^{(l)}(x'))\,dx' =$$

$$= (l-k) \int\limits_{\Sigma_{n-1}} Y^{(k)}(x')\,Y^{(l)}(x')\,dx'.$$

Искомый результат получается отсюда делением на $(l-k)$, что можно сделать, поскольку $l \neq k$.

Будем рассматривать $\mathcal{H}_k$ как подпространство пространства $L^2(\Sigma_{n-1})$ со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{\Sigma_{n-1}} f(x')\,\overline{g(x')}\,dx'$.

Пусть $\{Y_1^{(k)}, \ldots, Y_{a_k}^{(k)}\}$, $a_k = d_k - d_{k-2}$, — ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$; тогда, в силу следствия 2.4, множество $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \{Y_1^{(k)}, \ldots, Y_{a_k}^{(k)}\}$

будет ортонормированным базисом в $L^2(\Sigma_{n-1})$. Действительно, если $f \not\equiv 0$ ортогональна ко всем элементам этого множества, то

$$\|f-h\|_2^2 = \|f\|_2^2 - (f, h) - (h, f) + \|h\|_2^2 = \\ = \|f\|_2^2 + \|h\|_2^2 \geqslant \|f\|_2^2 > 0$$

для всех конечных линейных комбинаций h элементов из $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$, что невозможно, в силу следствия 2.3 (ii). Таким образом, если $f \in L^2(\Sigma_{n-1})$, то существует единственное разложение

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}, \tag{2.5}$$

где ряд справа сходится к f по L^2-норме и $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$, причем $Y^{(k)} = b_1^{(k)} Y_1^{(k)} + \dots + b_{a_k}^{(k)} Y_{a_k}^{(k)}$, $b_j^{(k)} = (f, Y_j^{(k)})$, $j = 1, \dots, a_k$. Когда $n = 2$, (2.5) есть ряд Фурье функции f. В этом случае элементы

$$Y_1^{(k)}(e^{i\theta}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos k\theta$$

и

$$Y_2^{(k)}(e^{i\theta}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin k\theta$$

образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$.

Функции $Y_1^{(k)}$ играют особую роль в теории рядов Фурье. Например, абелевы средние $u(r, \theta) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{ik\theta}$, $0 \leqslant r < 1$, ряда Фурье интегрируемой периодической функции f просто выражаются в терминах $Y_1^{(k)}$ и f. Точнее, используя основное тригонометрическое тождество

$$\cos(\theta - \varphi) = \cos\varphi \cos\theta + \sin\varphi \sin\theta, \tag{2.6}$$

получаем

$$u(r, \theta) = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, p(r, \theta - \varphi)\, d\varphi,$$

где

$$p(r, \theta) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\theta\right\} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \tag{2.7}$$

— ядро Пуассона для единичного круга (см. теорему 1.9 гл. II). Покажем теперь, что подобная ситуация имеет место и для большего числа измерений. Для того чтобы избежать случаев $n = 1$ и $n = 2$ (которые носят несколько исключительный характер и уже рассмотрены выше), в оставшейся части этого параграфа будем считать, что $n > 2$.

Фиксируем точку $x' \in \Sigma_{n-1}$ и рассмотрим линейный функционал L на $\mathcal{H}_k$, который каждой функции $Y \in \mathcal{H}_k$ ставит в соответствие число $Y(x')$. В силу самосопряженности конечномерного евклидова пространства $\mathcal{H}_k$, существует единственная сферическая гармоника $Z_{x'}^{(k)}$, такая, что

$$L(Y) = Y(x') = \int_{\Sigma_{n-1}} Y(t')\, Z_{x'}^{(k)}(t')\, dt'$$

для всех $Y \in \mathcal{H}_k$. Эта функция $Z_{x'}^{(k)}$ называется *зональной гармоникой степени k с полюсом x'*. Установим несколькс элементарных, но важных свойств зональных гармоник.

Лемма 2.8. (a) *Пусть $\{Y_1, \ldots, Y_{a_k}\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$; тогда* $Z_{x'}^{(k)}(t') = \sum\limits_{m=1}^{a_k} \overline{Y_m(x')}\, Y_m(t')$;

(b) $Z_{x'}^{(k)}$ *вещественнозначна и* $Z_{x'}^{(k)}(t') = Z_{t'}^{(k)}(x')$;

(c) *пусть ρ — вращение; тогда* $Z_{\rho x'}^{(k)}(\rho t') = Z_{x'}^{(k)}(t')$.

Доказательство. Так как $\{Y_1, \ldots, Y_{a_k}\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$, то

$$Z_{x'}^{(k)} = \sum_{m=1}^{a_k} (Z_{x'}^{(k)}, Y_m)\, Y_m.$$

Но, согласно определяющему свойству зональных гармоник,

$$(Z_{x'}^{(k)}, Y_m) = \int_{\Sigma_{n-1}} \overline{Y_m(t')}\, Z_{x'}^{(k)}(t')\, dt' = \overline{Y_m(x')},$$

и часть (a) доказана. Предложенный вывод формулы для размерности пространства $\mathcal{H}_k$ не зависел от того, каким считать $\mathcal{H}_k$ — вещественным или комплексным. Поэтому можно выбрать ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$, состоящий из вещественных функций. Если это сделать, то очевидно, что функции $Z_{x'}^{(k)}$ также будут вещественными. Часть (b) тогда немедленно следует из (a).

Положив $w' = \rho t'$, получим для $Y \in \mathcal{H}_k$

$$\int_{\Sigma_{n-1}} Z_{\rho x'}^{(k)}(\rho t')\, Y(t')\, dt' = \int_{\Sigma_{n-1}} Z_{\rho x'}^{(k)}(w')\, Y(\rho^{-1} w')\, dw' =$$

$$= Y(\rho^{-1}(\rho x')) = Y(x').$$

Таким образом, в силу единственности представления линейных функционалов, имеем $Z_{\rho x'}^{(k)}(\rho t') = Z_{x'}^{(k)}(t')$, и часть (c) доказана.

Следствие 2.9. (a) $Z_{x'}^{(k)}(x') = a_k \omega_{n-1}^{-1}$ *для всех* $x' \in \Sigma_{n-1}$, *где a_k — размерность пространства $\mathcal{H}_k$ и ω_{n-1} — площадь сферы Σ_{n-1}*;

(b) $\sum_{m=1}^{a_k} |Y_m(x')|^2 = a_k\omega_{n-1}^{-1}$ *для всех* $x' \in \Sigma_{n-1}$ *независимо от выбора ортонормированного базиса* $\{Y_1, \ldots, Y_{a_k}\}$ *в* $\mathcal{H}_k$;

(c) $|Z_{t'}^{(k)}(x')| \leqslant a_k\omega_{n-1}^{-1}$ *для всех* x' *и* t' *из* Σ_{n-1}.

Доказательство. Пусть x_1' и x_2' — две точки из Σ_{n-1}. Существует вращение ρ, такое, что $\rho x_1' = x_2'$. В силу части (c) леммы 2.8, получим

$$Z_{x_2'}^{(k)}(x_2') = Z_{x_1'}^{(k)}(x_1').$$

Следовательно, $Z_{x'}^{(k)}(x')$ — постоянная, не зависящая от $x' \in \Sigma_{n-1}$. Из части (a) леммы 2.8 видим, что эта постоянная c должна равняться $\sum_{m=1}^{a_k} |Y_m(x')|^2$, где $\{Y_1, \ldots, Y_{a_k}\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$. Но тогда

$$a_k = \sum_{m=1}^{a_k} \int_{\Sigma_{n-1}} |Y_m(x')|^2\, dx' = \int_{\Sigma_{n-1}} \sum_{m=1}^{a_k} |Y_m(x')|^2\, dx' =$$
$$= \int_{\Sigma_{n-1}} c\, dx' = c\omega_{n-1}.$$

Таким образом, $c = a_k\omega_{n-1}^{-1}$, что доказывает части (a) и (b).

Для доказательства части (c) заметим сначала, что из определяющего свойства зональных гармоник следует, что

$$\text{(i)} \qquad Z_{t'}^{(k)}(x') = \int_{\Sigma_{n-1}} Z_{t'}^{(k)}(w')\, Z_{x'}^{(k)}(w')\, dw'$$

для всех t' и x' из Σ_{n-1}. С другой стороны, если $\{Y_1, \ldots, Y_{a_k}\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$, то из леммы 2.8 (a) и только что установленного результата следует, что

$$\| Z_{u'}^{(k)} \|_2^2 = \int_{\Sigma_{n-1}} |Z_{u'}^{(k)}(w')|^2\, dw' = \sum_{m=1}^{a_k} |Y_m(u')|^2 = a_k\omega_{n-1}^{-1}$$

для всех $u' \in \Sigma_{n-1}$. Таким образом, в силу (i), неравенства Шварца и последнего равенства, имеем

$$|Z_{t'}^{(k)}(x')| \leqslant \| Z_{t'}^{(k)} \|_2 \| Z_{x'}^{(k)} \|_2 \leqslant \sqrt{a_k\omega_{n-1}^{-1}}\, \sqrt{a_k\omega_{n-1}^{-1}} = a_k\omega_{n-1}^{-1},$$

и последняя часть следствия доказана[1].

---

[1] Читатель заметит, что при $n = 2$ лемма 2.8 и следствие 2.9 сводятся к известным элементарным свойствам тригонометрических функций. Например, лемма 2.8 (a) сводится в этом случае к равенству (2.6), а следствие 2.9(b) обобщает равенство $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Из формулы (2.7) видно, как ядро Пуассона для единичного круга можно выразить в терминах зональных гармоник. Покажем теперь, что такое же выражение справедливо в случае n измерений. Вспомним, что ядро Пуассона для единичного шара в E_n дается формулой (см. теорему 1.9 гл. II)

$$p(t', x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{1 - |x|^2}{|x - t'|^n}$$

для $0 \leqslant |x| < 1 = |t'|$.

Теорема 2.10. *Пусть* $x = rx'$, $r = |x| < 1$; *тогда*

$$p(t', x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k Z_{x'}^{(k)}(t') = \sum_{k=0}^{\infty} r^k Z_{t'}^{(k)}(x')$$

для всех $t' \in \Sigma_{n-1}$.

Доказательство. Из следствия 2.9 (с) и того, что

$$a_k = d_k - d_{k-2} = \{(n + 2k - 2)/k\} \binom{n + k - 3}{k - 1}$$

не превосходит постоянной, умноженной на k^{n-2}, вытекает, что ряд

$$q(t', x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k Z_{t'}^{(k)}(x')$$

сходится равномерно в каждой замкнутой области $\{x \in E_n; |x| \leqslant \leqslant r_0 < 1\}$. Рассмотрим теперь конечную линейную комбинацию сферических гармоник $u(t') = \sum_{j=0}^{m} Y_j(t')$ (где $Y_j \in \mathcal{H}_j$). Тогда, в силу теоремы 1.10 гл. II, определения сферических гармоник и единственности решения задачи Дирихле, функция

$$\sum_{j=0}^{m} |x|^j Y_j(x') = u(x) = \int_{\Sigma_{n-1}} u(t') p(t', x) \, dt'$$

должна быть непрерывной функцией при $|x| \leqslant 1$, гармонической при $|x| < 1$ и равной $u(x')$ при $|x'| = 1$. Но, в силу леммы 2.8 (b), определяющего свойства зональных гармоник и соотношения ортогональности из следствия 2.4, имеем

$$\int_{\Sigma_{n-1}} u(t') q(t', x) \, dt' = \sum_{j=0}^{m} \int_{\Sigma_{n-1}} Y_j(t') q(t', x) \, dt' =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |x|^k \int_{\Sigma_{n-1}} Y_j(t')\, Z_{t'}^{(k)}(x')\, dt' \right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} |x|^j Y_j(x') = u(x).$$

Таким образом, $\int_{\Sigma_{n-1}} [p(t', x) - q(t', x)]\, u(t')\, dt' = 0$ для всех конечных линейных комбинаций сферических гармоник. Поскольку последние плотны в $L^2(\Sigma_{n-1})$ (следствие 2.3 (ii)), а $p(t', x)$ и $q(t', x)$ — непрерывные функции переменной t', отсюда следует, что $p(t', x) = q(t', x)$, и теорема доказана.

Зональные гармоники можно охарактеризовать простым геометрическим свойством. Для того чтобы описать это свойство, определим *параллель поверхности* Σ_{n-1}, *ортогональную к точке* e *на* Σ_{n-1}, как пересечение единичной сферы с гиперплоскостью, перпендикулярной к прямой, проходящей через начало и точку e. Если ρ — вращение, оставляющее неподвижной точку e, то из леммы 2.8 (c) следует, что $Z_e^{(k)}(x') = Z_e^{(k)}(\rho x')$ для всех $x' \in \Sigma_{n-1}$. Но такое вращение, очевидно, должно отображать параллель, ортогональную к e, на себя; более того, для данных двух точек x_1' и x_2' на этой параллели из двумерного случая следует, что найдется вращение ρ, оставляющее точку e неподвижной и такое, что $\rho x_1' = x_2'$ (поскольку ρ можно выбрать таким, чтобы оно оставляло неподвижным ортогональное дополнение к плоскости, порождаемой точками x_1' и x_2'). Следовательно, зональная гармоника $Z_e^{(k)}$ с полюсом e постоянна на параллелях поверхности Σ_{n-1}, ортогональных к точке e. Покажем, что это свойство характеризует зональные гармоники с точностью до постоянного множителя. Заметим, что такие функции инвариантны при вращениях, оставляющих неподвижной точку e. Для использования этого замечания нам понадобится еще следующий результат:

Лемма 2.11. *Пусть P — многочлен на E_n, $n \geqslant 2$, такой, что $P(\rho x) = P(x)$ для всех вращений ρ и точек $x \in E_n$; тогда существуют постоянные $c_0, c_1, \ldots, c_m$, такие, что*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^k.$$

Доказательство. Всегда можно записать $P(x) = \sum_{l=0}^{j} P_l(x)$, где P_l — однородный многочлен степени l. Тогда для

каждого $\varepsilon > 0$ и каждого вращения ρ

$$\sum_{l=0}^{j} \varepsilon^l P_l(x) = P(\varepsilon x) = P(\varepsilon \rho x) = \sum_{l=0}^{j} \varepsilon^l P_l(\rho x).$$

Следовательно, $P_l(\rho x) = P_l(x)$, $l = 0, 1, \ldots, j$. Положим $F(x) = |x|^{-l} P_l(x)$; тогда F — однородная функция степени 0, инвариантная относительно группы вращений (т. е. $F(\rho x) = F(x)$ для всех вращений ρ). Но отсюда следует, что F — постоянная функция: $F(x) = c'_l$ для всех $x \in E_n$. Таким образом, $P_l(x) = c'_l |x|^l$. Поскольку P_l — многочлен, l должно быть четным, если $c'_l \neq 0$. Итак, $P(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k |x|^{2k}$, где $c_k = c'_{2k}$, $k = 0, 1, \ldots, m$, а m — наибольшее целое число, не превосходящее $j/2$.

Теорема 2.12. *Пусть e — точка на Σ_{n-1}. Функция $Y \in \mathcal{H}_k$ постоянна на параллелях поверхности Σ_{n-1}, ортогональных к точке e, тогда и только тогда, когда существует постоянная c, такая, что $Y = cZ_e^{(k)}$.*

Доказательство. Уже было показано, что зональные гармоники обладают этим свойством. Предположим, следовательно, что сферическая гармоника Y постоянна на параллелях поверхности Σ_{n-1}, ортогональных к точке e. Если $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \Sigma_{n-1}$ и τ — вращение, такое, что $e = \tau e_1$, то сферическая гармоника W со значениями $W(x') = Y(\tau x')$ постоянна на параллелях поверхности Σ_{n-1}, ортогональных к e_1. Если мы покажем, что $W = cZ_{e_1}^{(k)}$, то, в силу леммы 2.8 (с),

$$Y(y') = W(\tau^{-1} y') = cZ_{e_1}^{(k)}(\tau^{-1} y') = cZ_{\tau^{-1} e}^{(k)}(\tau^{-1} y') = cZ_e^{(k)}(y')$$

для всех $y' \in \Sigma_{n-1}$. Следовательно, достаточно показать, что $W = cZ_{e_1}^{(k)}$.

Пусть $P(x) = |x|^k W(x/|x|)$ при $x \neq 0$ и $P(0) = 0$. Тогда если ρ — вращение, оставляющее точку e_1 неподвижной, то $P(\rho x) = P(x)$ для всех $x \in E_n$. Все многочлены вида x_1^m, $m = 0, 1, \ldots$, также инвариантны относительно вращения ρ. Поэтому если записать

$$P(x) = \sum_{j=0}^{k} x_1^{k-j} P_j(x_2, \ldots, x_n),$$

то отсюда следует, что $P_0, P_1, \ldots, P_k$ инвариантны относительно ρ (заметим, что $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ и отображение $(x_2, \ldots, x_n) \to (x'_2, \ldots, x'_n)$ есть вращение в $(n-1)$-мерном подпространстве $x_1 = 0$, причем любое вращение этого подпространства

можно получить таким способом, выбирая подходящее ρ). В силу леммы 2.11, $P_j = 0$, если j нечетно, и $P_j(x_2, \ldots, x_n) = c_j(x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{j/2}$, если j четно. Положим $R = (x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$; тогда из доказанного следует, что

$$\text{(i)} \qquad P(x) = c_0 x_1^k + c_2 x_1^{k-2} R^2 + \cdots + c_{2l} x_1^{k-2l} R^{2l}.$$

Так как W — поверхностная сферическая гармоника, то P — пространственная сферическая гармоника. Таким образом,

$$0 = \Delta P(x) = \sum_{j=0}^{l-1} [c_{2j}\alpha_j + c_{2(j+1)}\beta_j]\, x_1^{k-2(j+1)} R^{2j},$$

где $\alpha_j = (k-2j)(k-2j-1)$ и $\beta_j = 2(j+1)(n+2j-1)$. Следовательно, $c_{2(j+1)} = -(\alpha_j/\beta_j)c_{2j}$, $j = 0, 1, \ldots, l-1$. Но отсюда следует, что все коэффициенты $c_0, c_2, \ldots, c_{2l}$ определяются по c_0. Таким образом, любые два ненулевых гармонических многочлена, имеющие вид (i), отличаются лишь на постоянный множитель. С другой стороны, мы показали, что любые два однородных многочлена степени k, сужения которых на Σ_{n-1} постоянны на параллелях Σ_{n-1}, ортогональных к e_1, должны иметь вид (i). Так как $Z_{e_1}^{(k)}(x/|x|)|x|^k$ обладает этим свойством и, кроме того, является гармоническим, то отсюда следует, что $W(x') = P(x') = cZ_{e_1}^{(k)}(x')$ для всех $x' \in \Sigma_{n-1}$, и теорема доказана.

Следствие 2.13. *Пусть функция $F_{y'}(x')$ определена для всех x', $y' \in \Sigma_{n-1}$ и*

(a) *$F_{y'}$ — сферическая гармоника степени k для каждого $y' \in \Sigma_{n-1}$,*

(b) *если ρ — вращение, то $F_{\rho y'}(\rho x') = F_{y'}(x')$.*

Тогда существует постоянная c, такая, что $F_{y'}(x') = cZ_{y'}^{(k)}(x')$ для всех x', $y' \in \Sigma_{n-1}$.

Доказательство. Фиксируем $y' \in \Sigma_{n-1}$, и пусть ρ — вращение, оставляющее y' неподвижным. Тогда, используя (b), получим

$$F_{y'}(x') = F_{\rho y'}(\rho x') = F_{y'}(\rho x')$$

для всех x' из Σ_{n-1}. Но это означает, в силу предположения (a), что $F_{y'}$ — сферическая гармоника, постоянная на параллелях поверхности Σ_{n-1}, ортогональных к y'. Согласно теореме 2.12, существует постоянная $c(y')$, такая, что $F_{y'} = c(y')Z_{y'}^{(k)}$. Таким образом, следствие будет доказано, если мы докажем, что $c(y_1') = c(y_2')$, когда y_1' и $y_2' \in \Sigma_{n-1}$. Для этого рассмотрим вращение σ, такое, что $\sigma y_1' = y_2'$. Тогда, используя предположение (b), полу-

чим $c(y_2')Z^{(k)}_{y_2'}(\sigma x') = F_{y_2'}(\sigma x') = F_{\sigma y_1'}(\sigma x') = F_{y_1'}(x') = c(y_1')Z^{(k)}_{y_1'}(x')$. С другой стороны, в силу леммы 2.8 (с),

$$Z^{(k)}_{y_1'}(x') = Z^{(k)}_{\sigma y_1'}(\sigma x') = Z^{(k)}_{y_2'}(\sigma x').$$

Следовательно, $c(y_1') = c(y_2')$.

Зональные гармоники особенно просто выражаются через ультрасферические многочлены (или многочлены Гегенбауэра) P_k^λ. Последние можно определить в терминах производящей функции. Запишем

$$(1 - 2rt + r^2)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^\lambda(t)\, r^k,$$

где $0 \leqslant |r| < 1$, $|t| \leqslant 1$ и $\lambda > 0$; тогда коэффициент $P_k^\lambda(t)$ называется *ультрасферическим многочленом степени k, ассоциированным с λ*. Выведем несколько наиболее элементарных свойств функций P_k^λ. Полагая $r = 0$, видим, что

(i) $$P_0^\lambda(t) \equiv 1.$$

Так как

$$2r\lambda \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{\lambda+1}(t)\, r^k = 2r\lambda(1 - 2rt + r^2)^{-\lambda-1} = \frac{d}{dt}(1 - 2rt + r^2)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \frac{d}{dt} P_k^\lambda(t),$$

то

(ii) $$\frac{d}{dt} P_k^\lambda(t) = 2\lambda P_{k-1}^{\lambda+1}(t) \quad \text{при } k \geqslant 1.$$

Из (i) и (ii) следует, что $(d/dt)P_1^\lambda(t) = 2\lambda$; следовательно, $P_1^\lambda(t)$ — многочлен степени 1. По индукции с помощью свойства (ii) получим

(iii) $P_k^\lambda(t)$ — *многочлен переменной t степени (в точности) k.*

Из этого свойства следует, что многочлены $1, t, \ldots, t^k, \ldots$ выражаются в виде конечных линейных комбинаций многочленов P_0^λ, $P_1^\lambda, \ldots, P_k^\lambda, \ldots$. Тогда, в силу теоремы Вейерштрасса об аппроксимации,

(iv) *конечные линейные комбинации многочленов* $P_k^\lambda(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, *равномерно плотны в пространстве непрерывных функций на замкнутом интервале* $[-1, 1]$.

Поскольку

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k^\lambda(-t)\, r^k = (1 + 2rt + r^2)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^\lambda(t)(-r)^k,$$

имеем

(v) $$P_k^\lambda(-t) = (-1)^k P_k^\lambda(t), \qquad k \geqslant 0.$$

Следующее представление зональных гармоник вытекает из этих свойств:

Теорема 2.14. *Если $n > 2$ — целое число, $\lambda = (n-2)/2$ и $k = 0, 1, \ldots$, то существует постоянная $c_{k,n}$, такая, что*

$$Z_{y'}^{(k)}(x') = c_{k,n} P_k^\lambda(x' \cdot y')$$

для всех x', $y' \in \Sigma_{n-1}$.

Доказательство. Пусть $y' \in \Sigma_{n-1}$; положим $F_{y'}(x) = |x|^k P_k^\lambda(x \cdot y'/|x|)$, $x \in E_n$. Если мы покажем, что $F_{y'}(x')$ удовлетворяет предположениям следствия 2.13, то теорема будет доказана. В силу свойств (iii) и (v), если k четно, скажем $k = 2m$, то $P_k^\lambda(t)$ имеет вид $P_k^\lambda(t) = \sum_{j=0}^m d_{2j}t^{2j}$, тогда как если k нечетно, скажем $k = 2m+1$, то $P_k^\lambda(t) = \sum_{j=0}^m d_{2j+1}t^{2j+1}$. Поэтому в первом случае

$$|x|^k P_k^\lambda\left(\frac{x \cdot y'}{|x|}\right) = \sum_{j=0}^m d_{2j}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{m-j}(x_1y_1' + \cdots + x_ny_n')^{2j},$$

а во втором случае

$$|x|^k P_k^\lambda\left(\frac{x \cdot y'}{|x|}\right) = \sum_{j=0}^m d_{2j+1}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{m-j}(x_1y_1' + \cdots + x_ny_n')^{2j+1}.$$

В обоих случаях $F_{y'}(x)$ — (ненулевой) однородный многочлен степени k.

Если ρ — вращение, то ρ сохраняет скалярное произведение и, следовательно,

$$F_{\rho y'}(\rho x') = P_k^\lambda(\rho x' \cdot \rho y') = P_k^\lambda(x' \cdot y') = F_{y'}(x')$$

во всех точках x', $y' \in \Sigma_{n-1}$. Таким образом, условие (b) следствия 2.13 выполнено и нужно показать только, что $F_{y'}$ — гармоническая функция. Мы уже отмечали (см. примеры 3 и 5 в начале § 1 гл. II), что функция $|x - x_0|^{2-n}$ гармонична по x в области $E_n - \{x_0\}$.

В частности, функция

$$(2.15)\quad s^{2-n}\left|x-\frac{y'}{s}\right|^{2-n}=\left[1-2s\,|x|\left(\frac{x}{|x|}\cdot y'\right)+(s\,|x|)^2\right]^{-\lambda}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} s^k\,|x|^k P_k^{\lambda}\left(\frac{x}{|x|}\cdot y'\right)$$

гармонична в области $\mathcal{R}=\mathcal{R}_s=\{x\in E_n;\ 0<|x|<1/s\}$ для фиксированных $s\neq 0$ и $y'\in\Sigma_{n-1}$. Но отсюда следует, что каждый из коэффициентов $F_{y'}(x)=|x|^k P_k^{\lambda}(x\cdot y'/|x|)$ должен быть гармонической функцией по x. В этом можно убедиться, например, взяв средние значения левой и правой частей равенства (2.15) по сферам с центром в точке x, лежащим в области $\mathcal{R}_s$. Так как левая часть обладает свойством среднего значения (теорема 1.1 гл. II) при $0<s\leqslant s_0<\infty$, это же будет справедливо и для всех коэффициентов $F_{y'}(x)=|x|^k P_k^{\lambda}(x\cdot y'/|x|)$. Отсюда и из теоремы 1.7 гл. II следует, что $F_{y'}$ — гармоническая функция.

Ультрасферические многочлены можно использовать для получения некоторых важных ортогональных разложений функций. Основное свойство ортогональности, необходимое для выполнения таких разложений, является простым следствием только что доказанной теоремы.

Следствие 2.16. *Многочлены $P_k^{(n-2)/2}(t)$, $k=0, 1, \ldots,$ попарно ортогональны по отношению к скалярному произведению*

$$(f, g)=\int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,(1-t^2)^{(n-3)/2}dt.$$

Доказательство. Пусть $e=(1, 0, \ldots, 0)$ и для $x'\in\Sigma_{n-1}$ определим θ, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, положив $e\cdot x'=\cos\theta$. Интегралы по Σ_{n-1} можно вычислять, интегрируя сначала по параллели $L_\theta=\{x'\in\Sigma_{n-1};\ e\cdot x'=\cos\theta\}$, ортогональной к e; получив таким образом функцию переменной θ, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, можно затем проинтегрировать ее по интервалу $[0,\pi]$. Мера параллели L_θ равна $\omega_{n-2}(\sin\theta)^{n-2}$ (площадь сферы радиуса $\sin\theta$ в E_{n-2}). Используя этот факт вместе со следствием 2.4 и теоремами 2.12 и 2.14, получим

$$0=\int_{\Sigma_{n-1}} Z_e^l(x')\,Z_e^k(x')\,dx'=$$

$$=c_{l,n}c_{k,n}\omega_{n-2}\int_0^{\pi} P_l^{(n-2)/2}(\cos\theta)\,P_k^{(n-2)/2}(\cos\theta)\,(\sin\theta)^{n-2}d\theta=$$

$$=\omega_{n-2}c_{l,n}c_{k,n}\int_{-1}^{1} P_l^{(n-2)/2}(t)\,P_k^{(n-2)/2}(t)\,(1-t^2)^{(n-3)/2}dt.$$

Отсюда и из свойства (iv) ультрасферических многочленов получаем

Следствие 2.17. *Многочлены* $P_k^{(n-2)/2}$, $k=0, 1, \ldots$, *образуют ортогональный базис пространства* $L^2([-1, 1]; (1-t^2)^{(n-3)/2}dt)$[1].

Завершив наше изучение сферических гармоник в основном с точки зрения функций на сфере, покажем теперь, как их можно применить для гармонического анализа функций на E_n. Точнее, мы изучим подпространства $\mathfrak{H}_k$ пространства $L^2(E_n)$. Напомним, что $\mathfrak{H}_k$ было определено как пространство, состоящее из всех линейных комбинаций функций вида $f(r)P(x)$, где f пробегает все радиальные функции, а P — все пространственные сферические гармоники степени k, такие, что $f(r)P(x)$ принадлежит $L^2(E_n)$.

В качестве подготовки к материалу § 3 сформулируем и докажем следующую лемму:

Лемма 2.18. *Разложение в прямую сумму* $L^2(E_n)=\sum_{k=0}^{\infty}\oplus\mathfrak{H}_k$ *справедливо в том смысле, что:*

(a) *каждое подпространство* $\mathfrak{H}_k$ *замкнуто;*

(b) *подпространства* $\mathfrak{H}_k$ *попарно ортогональны;*

(c) *каждый элемент из* $L^2(E_n)$ *есть предел конечных линейных комбинаций элементов, принадлежащих* $\mathfrak{H}_k$. *Кроме того, преобразование Фурье отображает* $\mathfrak{H}_k$ *на себя.*

Доказательство. Пространство пространственных сферических гармоник степени k, будучи изоморфным пространству $\mathcal{H}_k$, имеет (конечную) размерность $a_k=d_k-d_{k-2}$. Пусть $P_1, \ldots, P_{a_k}$ — ортонормированный базис в этом пространстве (со скалярным произведением, перенесенным с пространства $L^2(\Sigma_{n-1})$). Тогда каждый элемент из $\mathfrak{H}_k$ можно записать в виде $\sum_{j=1}^{a_k} f_j(r)P_j(x)$. Кроме того,

$$\int_{E_n}|f(x)|^2\,dx=\sum_{j=1}^{a_k}\int_0^\infty |f_j(r)|^2 r^{n-1}dr.$$

Отсюда с очевидностью следует утверждение (a). Попарная ортогональность пространств $\mathfrak{H}_k$ непосредственно выводится из ортогональности сферических гармоник (следствие 2.4) с помощью интегрирования в сферических координатах. Для доказательства свойства полноты (c) достаточно показать, что если функция из $L^2(E_n)$ ортогональна ко всем пространствам $\mathfrak{H}_k$, то она равна 0 почти всю-

[1]) Следствия 2.16 и 2.17 справедливы для всех $\lambda>0$, а не только для $\lambda=(n-2)/2$. Однако для их доказательства нужны другие рассуждения.

ду. В силу полноты сферических гармоник на сфере, такая функция должна обращаться в 0 почти всюду на почти каждой сфере с центром в начале координат, откуда и следует наше утверждение.

Действие преобразования Фурье на $\mathfrak{H}_k$ будет предметом обсуждения в следующем параграфе. Однако элементарные рассуждения позволяют доказать уже сейчас, что преобразование Фурье отображает все пространства $\mathfrak{H}_k$ на себя. Для этой цели достаточно рассмотреть функцию $f \in L^1(E_n) \cap L^2(E_n)$ вида $f(u) = f_0(\rho) P(u) = \rho^k f_0(\rho) Y(u')$, где $Y \in \mathcal{H}_k$, $\rho = |u|$ и $u = \rho u'$. Поскольку конечные линейные комбинации таких функций плотны в $\mathfrak{H}_k$, последнее пространство будет инвариантным относительно действия преобразования Фурье, если $\hat{f} \in \mathfrak{H}_k$ для всех f указанного выше вида. Положив $r = |x|$ и $x = rx'$, получим

$$\hat{f}(x) = \int_{E_n} e^{-2\pi i x \cdot u} f(u)\, du = \int_0^\infty f_0(\rho)\, \rho^{k+n-1} \left\{ \int_{\Sigma_{n-1}} e^{-2\pi i r\rho x' \cdot u'} Y(u')\, du' \right\} d\rho.$$

Если мы теперь покажем, что существует функция φ на $[0, \infty)$, такая, что

$$\int_{\Sigma_{n-1}} e^{-2\pi i s x' \cdot u'} Y(u')\, du' = \varphi(s) Y(x') \tag{2.19}$$

при $s \geqslant 0$, то

$$\hat{f}(x) = \left\{ \int_0^\infty f_0(\rho)\, \varphi(r\rho)\, \rho^{n-1} d\rho \right\} Y(x')$$

и, следовательно, $\hat{f} \in \mathfrak{H}_k$.

Из определяющего свойства зональных сферических гармоник $Z_{u'}^{(k)}(v')$ и тождества $Z_{u'}^{(k)}(v') = Z_{v'}^{(k)}(u')$ получаем

$$\int_{\Sigma_{n-1}} e^{-2\pi i s x' \cdot u'} Y(u')\, du' = \int_{\Sigma_{n-1}} e^{-2\pi i s x' \cdot u'} \left\{ \int_{\Sigma_{n-1}} Y(v') Z_{u'}^{(k)}(v')\, dv' \right\} du' =$$

$$= \int_{\Sigma_{n-1}} Y(v') \left\{ \int_{\Sigma_{n-1}} e^{-2\pi i s x' \cdot u'} Z_{v'}^{(k)}(u')\, du' \right\} dv'.$$

Обозначив выражение в фигурных скобках $F_{x'}(v')$, из теоремы Фубини и следствия 2.4 непосредственно получаем, что $F_{x'}$ как функция $v' \in \Sigma_{n-1}$ ортогональна всем пространствам $\mathcal{H}_j$, $j \neq k$. Но, в силу (2.5), отсюда вытекает, что $F_{x'} \in \mathcal{H}_k$. Применяя лемму 2.8 (с) и выполняя замену переменных $u' = \sigma w'$, находим, что $F_{\sigma x'}(\sigma v') = F_{x'}(v')$ для всех вращений σ. Итак, в силу следствия 2.13 существует число $c\,(= \varphi(s))$, такое, что $F_{x'}(v') = cZ_{x'}^{(k)}(v')$

для всех x', $v' \in \Sigma_{n-1}$. Следовательно,

$$\int\limits_{\Sigma_{n-1}} e^{-2\pi i s x' \cdot u'} Y(u')\,du' = \int\limits_{\Sigma_{n-1}} Y(v')\,F_{x'}(v')\,dv' =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_{n-1}} Y(v')\,\varphi(s)\,Z_{x'}^{(k)}(v')\,dv' = \varphi(s)\,Y(x'),$$

и равенство (2.19) доказано.

3. Действие преобразования Фурье на пространствах $\mathfrak{H}_k$

Мы показали, что преобразование Фурье радиальной функции есть радиальная функция (см. следствие 1.2). В двумерном случае была получена явная формула, связывающая две радиальные функции (частный случай $k = 0$ теоремы 1.6). Эта формула имеет естественное обобщение на $n > 2$ измерений, и, как и в случае $n = 2$, в нее входит функция Бесселя. Мы покажем, что этой функцией Бесселя является $J_{(n-2)/2}$. Когда n нечетно, $(n-2)/2$ не является целым; следовательно, в этом случае $J_{(n-2)/2}$ не будет функцией введенного в § 1 типа. Однако мы покажем, что существует естественный способ так расширить введенный класс функций Бесселя, чтобы включить те функции, которые нам встретятся. Для того чтобы сделать это, установим следующее тождество (известное как *представление Пуассона функций Бесселя*):

Лемма 3.1. *Пусть k — неотрицательное целое число; тогда*

$$J_k(t) = \frac{(t/2)^k}{\Gamma[(2k+1)/2]\,\Gamma(1/2)} \int\limits_{-1}^{1} e^{its}(1-s^2)^{(2k-1)/2}\,ds.$$

Доказательство. Определим J_k^*, положив

$$J_k^*(t) = \frac{(t/2)^k}{\Gamma[(2k+1)/2]\,\Gamma(1/2)} \int\limits_{-1}^{1} e^{its}(1-s^2)^{(2k-1)/2}\,ds.$$

Из определения J_0 (см. § 1) с помощью замены переменных $s = \sin\theta$ немедленно получаем, что $J_0^* = J_0$. Лемма будет, следовательно, доказана, если мы сможем доказать рекуррентную формулу

$$(3.2)\qquad \frac{d}{dt}\left(t^{-k}G_k(t)\right) = -t^{-k}G_{k+1}(t),\quad t \neq 0,\quad k = 0, 1, \ldots,$$

для обеих последовательностей $\{J_k\}$ и $\{J_k^*\}$. Но

$$\frac{d}{dt}\left(t^{-k}J_k(t)\right) = -t^{-k}\left\{\frac{k}{t}J_k(t) - J_k'(t)\right\} =$$

$$= -t^{-k}\left\{\frac{k}{2\pi t}\int\limits_0^{2\pi} e^{it\sin\theta}e^{-ik\theta}d\theta - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{d}{dt}e^{it\sin\theta}\right)e^{-ik\theta}d\theta\right\} =$$

$$= -\frac{t^{-k}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\{i\frac{d}{d\theta}\left[\frac{e^{it\sin\theta}e^{-ik\theta}}{t}\right] + \cos\theta e^{it\sin\theta}e^{-ik\theta-i\sin\theta}\times\right.$$

$$\left.\times\, e^{it\sin\theta}e^{-ik\theta}\right\}d\theta =$$

$$= -\frac{t^{-k}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{it\sin\theta}e^{-i(k+1)\theta}d\theta = -t^{-k}J_{k+1}(t).$$

В то же время, интегрируя по частям и используя равенство

$$\left(\frac{2k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right),$$

получим

$$\frac{d}{dt}(t^{-k}J_k^*(t)) = \frac{2^{-k}\,i}{\Gamma\left[(2k+1)/2\right]\Gamma(1/2)}\int\limits_{-1}^{1} e^{its}s(1-s^2)^{(2k-1)/2}ds =$$

$$= \frac{2^{-k}i}{\Gamma\left[(2k+1)/2\right]\Gamma(1/2)}\int\limits_{-1}^{1}\frac{2it}{(2k+1)}e^{its}\frac{(1-s^2)^{(2k+1)/2}}{2}ds =$$

$$= -t^{-k}J_{k+1}^*(t).$$

Введенный в лемме 3.1 интеграл определен для всех вещественных $k > -1/2$. Следовательно, определив *функцию Бесселя* J_k, где k — вещественное число, большее $-{}^1/_2$, равенством

$$J_k(t) = \frac{(t/2)^k}{\Gamma\left[(2k+1)/2\right]\Gamma(1/2)}\int\limits_{-1}^{1} e^{its}(1-s^2)^{(2k-1)/2}ds$$

при $t > 0$, мы получим более широкий класс функций, чем рассмотренный в § 1.

Предположим теперь, что f — радиальная функция из $L^1(E_n)$, т. е. $f(x) = f_0(|x|)$ для почти всех $x \in E_n$, где $\int\limits_0^\infty |f_0(r)|\,r^{n-1}dr < \infty$. Тогда ее преобразование Фурье $\hat{f}$ — также радиальная функция, следовательно, $\hat{f}(x) = F_0(|x|)$ для всех $x \in E_n$. Значит, если $r = |x|$, $x = rx'$, $s = |u|$ и $u = su'$, то

$$F_0(r) = \hat{f}(x) = \int\limits_{E_n} f(u)e^{-2\pi i x\cdot u}du =$$

$$= \int\limits_0^\infty f_0(s)\left\{\int\limits_{\Sigma_{n-1}} e^{-2\pi i r s(x'\cdot u')}du'\right\}s^{n-1}ds.$$

Внутренний интеграл можно вычислить методом, использованным при доказательстве следствия 2.16. Сначала проинтегрируем по параллели $L_\theta = \{u' \in \Sigma_{n-1};\ x' \cdot u' = \cos\theta\}$, ортогональной к x', и затем проинтегрируем полученную функцию переменной θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, по интервалу $[0, \pi]$. Таким образом, поскольку выражение $e^{-2\pi i r s(x' \cdot u')} = e^{-2\pi i r s \cos\theta}$ постоянно на L_θ и мера этой параллели равна $\omega_{n-2}(\sin\theta)^{n-2} = (2\pi^{(n-1)/2}/\Gamma[(n-1)/2])(\sin\theta)^{n-2}$, получаем

$$\int\limits_{\Sigma_{n-1}} e^{-2\pi i r s(x' \cdot u')}\,du' = \int\limits_0^\pi e^{-2\pi i r s \cos\theta}\omega_{n-2}(\sin\theta)^{n-2}\,d\theta =$$

$$= \omega_{n-2}\int\limits_{-1}^{1} e^{2\pi i r s \xi}(1-\xi^2)^{(n-3)/2}\,d\xi =$$

$$= \frac{2\pi^{(n-1)/2}\Gamma[(n-1)/2]\,\Gamma(1/2)}{\Gamma[(n-1)/2]\,(\pi r s)^{(n-2)/2}}\,J_{(n-2)/2}(2\pi r s) =$$

$$= 2\pi(rs)^{-(n-2)/2}J_{(n-2)/2}(2\pi r s).$$

Тем самым доказан следующий результат:

Теорема 3.3. *Пусть f — радиальная функция из $L^1(E_n)$, $n \geqslant 2$, т. е. $f(x) = f_0(|x|)$ для почти всех $x \in E_n$. Тогда ее преобразование Фурье $\hat{f}$ — также радиальная функция вида $\hat{f}(x) = F_0(|x|)$ для всех $x \in E_n$, где*

$$F_0(|x|) = F_0(r) = 2\pi r^{-[(n-2)/2]}\int\limits_0^\infty f_0(s)J_{(n-2)/2}(2\pi r s)\,s^{n/2}\,ds\,^{1)}.$$

Эта теорема показывает, как преобразование Фурье действует на пространстве $\mathfrak{H}_0$. Обратим теперь наше внимание на пространства $\mathfrak{H}_k$, $k \geqslant 1$. Начнем с рассмотрения действия преобразования Фурье на одном важном классе функций.

Теорема 3.4. *Пусть $f(u) = e^{-\pi|u|^2}P(u)$, $u \in E_n$, где $P(u)$ — пространственная сферическая гармоника степени k; тогда $\hat{f}(v) = i^{-k}f(v)$ для всех $v \in E_n$.*

Доказательство. Фиксируем $t \in E_n$; тогда

$$\int\limits_{E_n} e^{-\pi|u|^2}P(u+t)\,du = \int\limits_0^\infty r^{n-1}e^{-\pi r^2}\left\{\int\limits_{\Sigma_{n-1}} P(t+ru')\,du'\right\}dr.$$

---

1) Причина, по которой как здесь, так и в теореме 1.6 мы рассматриваем действие преобразования Фурье на $L^1(E_n)$, а не на $L^2(E_n)$, заключается в том, что в этом случае все встречающиеся интегралы определены в L^1-смысле. Однако эти результаты очевидным образом распространяются на пространство $L^2(E_n)$.

Так как P — гармоническая функция, то она обладает свойством среднего значения (теорема 1.1 гл. II), и, следовательно, $\int\limits_{\Sigma_{n-1}} P(t+ru')\,du' = \omega_{n-1} P(t)$. Таким образом,

$$\int\limits_{E_n} e^{-\pi|u|^2} P(u+t)\,du = P(t)\int\limits_0^\infty r^{n-1}e^{-\pi r^2}\omega_{n-1}dr =$$

$$= P(t)\int\limits_0^\infty r^{n-1}e^{-\pi r^2}\left\{\int\limits_{\Sigma_{n-1}} du'\right\}dr =$$

$$= P(t)\int\limits_{E_n} e^{-\pi|x|^2}dx = P(t).$$

Будучи многочленом, $P(t) = P(t_1, \ldots, t_n)$ имеет очевидное аналитическое продолжение $P(z) = P(z_1, \ldots, z_n)$ на все пространство $\mathbf{C}_n$. При этом из последнего равенства следует, что

$$\int\limits_{E_n} e^{-\pi|u|^2}P(u+z)\,du = P(z)$$

для всех $z = x+iy = (x_1+iy_1, \ldots, x_n+iy_n) \in \mathbf{C}_n$. В частности, для $z = -iv$ имеем

$$\int\limits_{E_n} e^{-\pi|u|^2}P(u-iv)\,du = P(-iv) = (-i)^k P(v),$$

где последнее равенство следует из однородности P. Но n-кратное применение интегральной теоремы Коши показывает, что

$$\int\limits_{E_n} e^{-\pi(u+iv)\cdot(u+iv)} P(u)\,du = \int\limits_{E_n} e^{-\pi u\cdot u}P(u-iv)\,du = (-i)^k P(v),$$

где $(u+iv)\cdot(u+iv) = \sum\limits_{j=1}^n (u_j+iv_j)^2$. Умножив теперь левую и правую части на $e^{-\pi|v|^2}$, получим искомое равенство $\hat{f}(v) = (-i)^k f(v) = i^{-k} f(v)$.

Теорема 3.4 позволяет изучать поведение преобразования Фурье для более широкого класса функций. Положим $g(x) = e^{-\pi|\alpha x|^2} P(x) = \alpha^{-k} f(\alpha x)$ для $x \in E_n$ и $\alpha > 0$. Если δ_α обозначает растяжение в α раз, то из равенства (1.6) гл. I, теоремы 3.4 и однородности $P(x)$ следует, что

(3.5) $$\hat{g}(x) = \alpha^{-k}(\delta_\alpha f)^\wedge(x) = \alpha^{-k}\alpha^{-n}\hat{f}(\alpha^{-1}x) = i^{-k}\alpha^{-n-2k}e^{-\pi|x|^2/\alpha^2}P(x).$$

С другой стороны, если h — радиальная функция, определяемая равенством $h(x) = e^{-\pi|\alpha x|^2}$, $x \in E_{n+2k}$, то применение теоремы 1.13

гл. I дает

$$\hat{h}(x)=\alpha^{-n-2k}e^{-\pi|x|^2/\alpha^2}. \tag{3.6}$$

Эти два равенства можно интерпретировать следующим образом. Пусть $\mathcal{D}_m$ — гильбертово пространство функций φ, определенных на интервале $(0, \infty)$ и таких, что

$$\|\varphi\|=\left(\int\limits_0^\infty |\varphi(r)|^2 r^{m-1}dr\right)^{1/2}<\infty.$$

Пусть $m=n+2k$ и $P(x)$ — ненулевая пространственная сферическая гармоника степени k; рассмотрим функцию $g(x)=$ $=\varphi(|x|)P(x)$, $x\in E_n$. Тогда

$$\|g\|_2^2=\int\limits_{E_n}|\varphi(|x|)P(x)|^2dx=\left(\int\limits_0^\infty|\varphi(r)|^2r^{n+2k-1}dr\right)\|P\|_\Sigma^2<\infty,$$

где $\|P\|_\Sigma=\left(\int\limits_{\Sigma_{n-1}}|P(x')|^2dx'\right)^{1/2}$. Таким образом, $g\in L^2(E_n)$, и, в силу теоремы Планшереля, $\hat{g}\in L^2(E_n)$, $\|\hat{g}\|_2=\|g\|_2$. Из (2.19) и последнего равенства норм следует, что $\hat{g}(x)=\psi(|x|)P(x)$ для почти всех $x\in E_n$ и что $\|\psi\|=\|\varphi\|$. Следовательно, положив $T_k^n\varphi=\psi$, мы получим ограниченный линейный оператор T_k^n на $\mathcal{D}_{n+2k}$ (в действительности оператор T_k^n изометрический). Подобным образом, рассмотрев радиальную функцию h, определенную равенством $h(x)=\varphi(|x|)$, $x\in E_{n+2k}$, мы получим другой ограниченный линейный оператор T_0^{n+2k} на $\mathcal{D}_{n+2k}$. Для того чтобы задать этот оператор, заметим сначала, что в силу следствия 1.2 функция $\hat{h}$ также радиальна, скажем $\hat{h}(x)=\theta(|x|)$ для почти всех $x\in E_{n+2k}$. Положив $T_0^{n+2k}\varphi=\theta$, получим искомый ограниченный линейный оператор на $\mathcal{D}_{n+2k}$ (и снова из теоремы Планшереля сразу следует, что T_0^{n+2k} — изометрический оператор).

Равенства (3.5) и (3.6) показывают, что $T_0^{n+2k}\varphi=i^kT_k^n\varphi$, когда $\varphi(r)=e^{-\varepsilon r^2}$, $\varepsilon>0$. Таким образом, операторы T_0^{n+2k} и $i^kT_k^n$ совпадают на пространстве $\mathcal{W}$ всех конечных линейных комбинаций таких функций φ с произвольными $\varepsilon>0$. Но не трудно показать, что $\mathcal{W}$ плотно в гильбертовом пространстве $\mathcal{D}_{n+2k}$. Если бы это было не так, то нашлась бы функция $b\in\mathcal{D}_{n+2k}$, не равная 0 почти всюду и такая, что $\int\limits_0^\infty\varphi(r)b(r)r^{n+2k-1}dr=0$ для всех $\varphi\in$

$\in \mathcal{W}$. В частности,

(3.8) $$\int_0^\infty e^{-\varepsilon r^2} b(r)\, r^{n+2k-1} dr = 0$$

для всех $\varepsilon > 0$. Пусть Φ — функция, определяемая равенством $\Phi(s) = \int_0^s e^{-r^2} b(r)\, r^{n+2k-1} dr$, $s \geqslant 0$. Тогда, положив $\varepsilon = (m+1)$, где m — положительное целое число, и интегрируя (3.8) по частям, получим

$$0 = \int_0^\infty e^{-mr^2} \Phi'(r)\, dr = 2m \int_0^\infty e^{-mr^2} \Phi(r)\, r dr.$$

Заменой переменных $u = e^{-r^2}$ это равенство приводится к виду

$$0 = \int_0^1 u^{m-1} \Phi\left(\sqrt{\log \frac{1}{u}}\right) du, \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots .$$

Поскольку многочлены равномерно плотны в пространстве непрерывных на замкнутом отрезке $[0, 1]$ функций, из последнего равенства следует, что $\Phi(\sqrt{\log(1/u)}) = 0$ для всех $u \in [0, 1]$, т. е. $\Phi'(r) = e^{-r^2} b(r)\, r^{n+2k-1} = 0$ для почти всех $r \in (0, \infty)$, а это противоречит предположению, что $b(r)$ не равна 0 почти всюду.

Так как операторы T_0^{n+2k} и $i^k T_k^n$ ограничены и совпадают на плотном подпространстве $\mathcal{W}$, то они равны. Таким образом,

(3.9) $$T_0^{n+2k} \varphi = i^k T_k^n \varphi \qquad \text{для всех } \varphi \in \mathcal{D}_{n+2k}.$$

В теореме 3.3 для преобразования Фурье радиальной функции было получено выражение в виде интеграла, содержащего функцию Бесселя. Равенства (2.19) и (3.9) показывают, что преобразование Фурье функции из $\mathfrak{H}_k$ вида $f_0(|x|)\, P(x)$, где $P(x)$ — пространственная сферическая гармоника степени k на E_n, может быть выражено в терминах преобразования Фурье радиальной функции, определяемой равенством $h(y) = f_0(|y|)$, $y \in E_{n+2k}$. Объединяя эти результаты, получим следующую теорему (имеющую очевидное обобщение на все пространство $L^1(E_n)$ или $L^2(E_n)$):

Теорема 3.10. *Пусть $n \geqslant 2$, и пусть $f \in L^2(E_n) \cap L^1(E_n)$ имеет вид $f(x) = f_0(|x|)\, P(x)$, где $P(x)$ — пространственная сферическая гармоника степени k; тогда $\hat{f}$ имеет вид $\hat{f}(x) = F_0(|x|)\, P(x)$, где*

$$F_0(r) = 2\pi i^{-k} r^{-(n+2k-2)/2} \int_0^\infty f_0(s)\, J_{(n+2k-2)/2}(2\pi r s)\, s^{(n+2k)/2} ds.$$

Эта теорема с учетом того, что пространства $\mathfrak{H}_k$ натянуты на функции вида $f_0(|x|)\,P(x)$, дает обещанное описание действия преобразования Фурье на пространствах $\mathfrak{H}_k$.

Равенство, описывающее действие преобразования Фурье на $\mathfrak{H}_k$, естественным образом приводит нас к изучению поведения функций Бесселя $J_m(r)$. Вблизи нуля имеем тривиальную оценку $J_m(r) \sim cr^m$ при $r \to 0$. Поведение при больших r менее очевидно; оно описывается следующей леммой:

Лемма 3.11. $J_m(r) = \sqrt{2/\pi r}\cos(r - \pi m/2 - \pi/4) + O(r^{-3/2})$ *при* $r \to \infty$. *В частности,*

$$J_m(r) = O(r^{-1/2}) \text{ при } r \to \infty\,[1]. \tag{3.12}$$

Доказательство. Учитывая определение $J_m(r)$ для $m > -1/2$, нужно оценить интеграл

$$I = \int_{-1}^{1} e^{irs}(1 - s^2)^{m-1/2}\,ds.$$

Для этого рассмотрим односвязную область в комплексной плоскости, полученную выбрасыванием лучей $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$. Затем выберем ту ветвь функции $f(z) = (1 - z^2)^{m-1/2}$, определенной в этой области, которая неотрицательна на отрезке $[-1, 1]$. Интегрируя $e^{irz}(1 - z^2)^{m-1/2} = e^{ir(x+iy)}(1 - [x + iy]^2)^{m-1/2}$ по прямоугольнику с нижней стороной $[-1, 1]$ и высотой $a > 0$, получим

$$0 = \int_0^a e^{ir(1+iy)}(y^2 - 2iy)^{m-1/2}\,dy + \int_{-1}^{1} e^{irs}(1 - s^2)^{m-1/2}\,ds + \int_a^0 e^{ir(iy-1)}(y^2 + 2iy)^{m-1/2}\,dy + \varepsilon(a),$$

где $\varepsilon(a) \to 0$ при $a \to \infty$. Далее,

$$I = \int_0^\infty e^{ir(iy-1)}(y^2 + 2iy)^{m-1/2}\,dy - \int_0^\infty e^{ir(1+iy)}(y^2 - 2iy)^{m-1/2}\,dy = I_1 - I_2.$$

Поскольку

$$(y^2 \pm 2iy)^{m-1/2} = \begin{cases} y^{m-1/2}(\pm 2i)^{m-1/2} + O(y^{m+1/2}), & 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ y^{m-1/2}(\pm 2i)^{m-1/2} + O(y^{2m-1}), & 1 \leqslant y < \infty, \end{cases}$$

---

[1] Для дальнейшего заметим, что, как показывает приведенное ниже доказательство, оценки для членов $O(r^{-1/2})$ и $O(r^{-3/2})$ равномерны по m, когда m пробегает произвольный замкнутый ограниченный подинтервал интервала $(-1/2, +\infty)$.

имеем

$$I_1 = e^{-ir}\int_0^\infty e^{-ry}(2i)^{m-1/2}y^{m-1/2}dy + O\left(\int_0^1 e^{-ry}y^{m+1/2}dy\right) + \\ + O\left(\int_1^\infty e^{-ry}y^{2m-1}dy\right).$$

Первый интеграл равен $(2i)^{m-1/2}\Gamma(m+{}^1/_2)(e^{-ir}/r^{m+1/2})$, второй есть $O(r^{-m-3/2})$, а третий $O(e^{-r})$ при $r\to\infty$. Аналогично, $I_2 = =(-2i)^{m-1/2}\Gamma(m+{}^1/_2)(e^{ir}/r^{m+1/2})+O(r^{-m-3/2})$ при $r\to\infty$. Учитывая, что $J_m(r) = [(r/2)^m/\Gamma(m+{}^1/_2)\Gamma({}^1/_2)](I_1-I_2)$, получаем утверждение леммы.

4. Некоторые применения

Многие важные операторы анализа являются сверточными операторами, т. е. переводят функцию f из некоторого функционального пространства в свертку $K*f$, где K — некоторая фиксированная функция (или, в более общем случае, обобщенная функция медленного роста). Мы уже встретили несколько таких операторов. Один из примеров — интеграл Пуассона, где $K(x) = K_y(x) = = c_n y/(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}$ для некоторого $y>0$ (см. § 1 в гл. I). Если функция f принадлежит пространству $L^1(E_n)$ (или $L^2(E_n)$), то из теорем 1.4 и 1.14 гл. I следует, что

$$(K*f)^\wedge(x) = e^{-2\pi y|x|}\hat{f}(x)$$

для $x\in E_n$ (или для почти всех $x\in E_n$). Отсюда видно, что если после действия этого сверточного оператора выполнить преобразование Фурье, то получится преобразование очень простого вида. Например, если $f\in L^2(E_n)$, то из теоремы Планшереля и сходимости $e^{-2\pi y|x|}$ к 1, когда $y\to 0$, непосредственно следует, что $\lim_{y\to 0}\|f - (K_y*f)\|_2 = 0$. Здесь мы имеем особенно простой пример следующей общей ситуации: преобразование Фурье сверточного оператора приводит к мультипликативному оператору, многие важные свойства которого легко выводятся. Ядро Пуассона является радиальной функцией. Другие ядра, которые мы будем рассматривать, будут либо радиальными, либо произведениями радиальных функций на сферические гармоники. Ввиду теоремы 3.10 можно ожидать, что преобразование Фурье такого ядра имеет тот же вид (даже если это ядро не является L^1- или L^2-функцией).

Наше первое применение связано с классом ядер, порождающих сверточные операторы, важные для теории преобразования Фурье и теории уравнений с частными производными. Это функции вида

$P(x)/|x|^{\beta}$, где P — пространственная сферическая гармоника степени k, а β — комплексное число. Если K — такая функция и $\operatorname{Re}\beta < n + k$, то она локально интегрируема и определяет обобщенную функцию медленного роста, как это описано в примере (3) § 3 гл. I. Значит, ее преобразование Фурье $\hat{K}$ определено и также является обобщенной функцией медленного роста. Следующий результат утверждает, что $\hat{K}$ — обобщенная функция медленного роста, когда β меняется в определенных пределах, и дает ее явный вид.

Теорема 4.1. *Пусть α — комплексное число, такое, что $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$, а $P(x)$ — гармонический многочлен на E_n, однородный степени k. Если $K(x) = P(x)/|x|^{n+k-\alpha}$, то $\hat{K}(t) = \gamma P(t)/|t|^{k+\alpha}$, где*

$$\gamma = \gamma_{k,\alpha} = i^{-k}\pi^{(n/2)-\alpha}\Gamma\left(\frac{k+\alpha}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{n+k-\alpha}{2}\right).$$

Доказательство. Определим функцию K_1, положив $K_1(x) = K(x)$, если $|x| \leqslant 1$, и $K_1(x) = 0$, если $|x| > 1$; затем определим K_2, положив $K_2 = K - K_1$. Тогда $K_1 \in L^1(E_n)$, и если наложить дополнительное ограничение, что $\operatorname{Re}\alpha < n/2$, то $K_2 \in L^2(E_n)$. Из определения преобразования Фурье обобщенной функции (см. (3.15), гл. I) следует, что $\hat{K} = \hat{K}_1 + \hat{K}_2$. Приближая K_1 и K_2 функциями из $L^1(E_n) \cap L^2(E_n)$ и используя равенство (2.19), находим, что $\hat{K}_1$ и $\hat{K}_2$ должны иметь вид $\hat{K}_1(x) = f_1(|x|)P(x)$ и $\hat{K}_2(x) = f_2(|x|)P(x)$. Таким образом, $\hat{K}(x) = f(|x|)P(x)$, где $f = f_1 + f_2$. Если бы $K \in L^1(E_n) \cap L^2(E_n)$, то из теоремы 3.10 немедленно следовало бы, что f — однородная функция степени $-(k+\alpha)$. К несчастью, это не так, и поэтому для доказательства свойства однородности нельзя непосредственно применить эту теорему. Однако можно использовать теорему 3.10 и аппроксимационные рассуждения для доказательства того, что для почти всех $r > 0$

$$f(\delta r) = \delta^{-k-\alpha} f(r) \tag{4.2}$$

для всех $\delta > 0$; это легко проделать, используя связь между преобразованием Фурье и действием растяжений на E_n.

Пусть φ — основная функция (элемент из $\mathscr{S}$). В силу формулы умножения (а фактически по определению преобразования Фурье обобщенной функции медленного роста), имеем

$$\int_{E_n} K(x)\hat{\varphi}(x)\,dx = \int_{E_n} \hat{K}(x)\varphi(x)\,dx.$$

Положив $x = \delta u$ слева и $x = \delta^{-1} v$ справа, получим

$$\delta^n \int\limits_{E_n} K(\delta u)\, \hat{\varphi}(\delta u)\, du = \delta^{-n} \int\limits_{E_n} \hat{K}(\delta^{-1} v)\, \varphi(\delta^{-1} v)\, dv.$$

Так как $K(\delta u) = \delta^{\alpha - n} K(u)$, то

$$\delta^{\alpha} \int\limits_{E_n} K(u)\, \hat{\varphi}(\delta u)\, du = \delta^{-n} \int\limits_{E_n} \hat{K}(\delta^{-1} v)\, \varphi(\delta^{-1} v)\, dv.$$

С другой стороны, преобразование Фурье функции ψ со значениями $\varphi(\delta^{-1} v)$ есть функция, определяемая равенством $\hat{\psi}(u) = \delta^n \hat{\varphi}(\delta u)$, $u \in E_n$. Таким образом,

$$\delta^{-\alpha} \int\limits_{E_n} \hat{K}(\delta^{-1} v)\, \varphi(\delta^{-1} v\ dv = \delta^n \int\limits_{E_n} K(u)\, \hat{\varphi}(\delta u)\, du = \int\limits_{E_n} K\ u)\, \hat{\psi}(u)\, du =$$

$$= \int\limits_{E_n} \hat{K}(u)\, \psi(u)\, du = \int\limits_{E_n} \hat{K}(v)\, \varphi(\delta^{-1} v)\, dv$$

для всех основных функций φ. Следовательно, $\hat{K}(v) = \delta^{-\alpha} \hat{K}(\delta^{-1} v)$ для почти всех $v \in E_n$ и равенство (4.2) получается непосредственно. Итак,

$$F(\xi) = \int\limits_0^{\xi} f(r)\, dr = \int\limits_0^1 f(\xi s)\, \xi ds = F(1)\, \xi^{1-k-\alpha}$$

для всех $\xi > 0$, откуда $f(r) = F'(r) = \gamma r^{-k-\alpha}$. Это показывает, что $\hat{K}(t) = \gamma P(t)/|t|^{k+\alpha}$ для почти всех $t \in E_n$, когда $0 < \operatorname{Re} \alpha < n/2$. Для того чтобы вычислить γ, положим $\varphi(x) = e^{-\pi |x|^2} P(x)$. В силу теоремы 3.4, $\hat{\varphi}(t) = i^{-k} \varphi(t)$, так что

$$i^{-k} \int\limits_{E_n} e^{-\pi |t|^2} P(t)\, \{P(t)/|t|^{k+n-\alpha}\}\, dt = \gamma \int\limits_{E_n} e^{-\pi |t|^2} P(t)\, \{P(t)/|t|^{k+\alpha}\}\, dt.$$

Переходя в этих интегралах к полярным координатам и сокращая общий член $\int\limits_{\Sigma_{n-1}} [P(t')]^2\, dt'$, получим

$$i^{-k} \int\limits_0^{\infty} r^{\alpha+k-1} e^{-\pi r^2} dr = \gamma \int\limits_0^{\infty} r^{k+n-\alpha-1} e^{-\pi r^2} dr.$$

Постоянная γ легко определяется из этого равенства и соотношения

$$\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right) \pi^{-(\beta+1)/2} = 2 \int\limits_0^{\infty} e^{-\pi t^2} t^{\beta}\, dt.$$

Наконец, надо обобщить результат на всю полосу $0 < \operatorname{Re} \alpha < n$. Было доказано равенство

$$(4.3)\quad \int_{E_n} \{P(x)/|x|^{k+n-\alpha}\}\, \hat{\varphi}(x)\, dx = \gamma_{k,\alpha} \int_{E_n} \{P(x)/|x|^{k+\alpha}\}\, \varphi(x)\, dx$$

для $0 < \operatorname{Re} \alpha < n/2$, где φ — основная функция. Но каждый из этих двух интегралов определяет аналитическую в полосе $0 < \operatorname{Re} \alpha < n$ функцию переменной α. Поскольку $\gamma_{k,\alpha}$ также определяет такую аналитическую функцию, равенство (4.3) должно выполняться для $0 < \operatorname{Re} \alpha < n$. Теперь наша теорема непосредственно следует из определения преобразования Фурье обобщенных функций.

Ядра вида $K(x) = P(x)/|x|^{n+k}$, $k \geqslant 1$, порождают важный класс операторов анализа[1]. Ввиду теоремы 4.1 естественно попытаться обосновать переход к пределу при $\alpha \to 0$ и доказать, что

$$\hat{K}(t) = i^{-k} \pi^{n/2} \left\{ \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right) \right\} P(t)/|t|^k.$$

Первая трудность, с которой мы встретимся, заключается в том, что K не интегрируема в окрестности начала. Функцию K, однако, можно использовать для определения обобщенной функции медленного роста L, положив

$$(4.4)\qquad L(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0 < \varepsilon \leqslant |t|} K(t)\, \varphi(t)\, dt$$

для каждой основной функции φ. Чтобы убедиться в том, что этот предел существует и определяет непрерывный линейный функционал на пространстве $\mathcal{S}$ основных функций, заметим сначала, что для этого достаточно показать, что это верно для $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon \leqslant |t| \leqslant 1} K(t)\, \varphi(t)\, dt$ (поскольку функция K_1, определяемая равенствами $K_1(t) = 0$ при $|t| \leqslant 1$ и $K_1(t) = K(t)$ при $|t| > 1$, есть обобщенная функция медленного роста). Так как $k \geqslant 1$, то

$$\int_{\varepsilon \leqslant |t| \leqslant 1} K(t)\, dt = \int_{\varepsilon}^{1} r^{-1} \left\{ \int_{\Sigma_{n-1}} P(t')\, dt' \right\} dr = 0.$$

Таким образом,

$$\int_{\varepsilon \leqslant |t| \leqslant 1} K(t)\, \varphi(t)\, dt = \int_{\varepsilon \leqslant |t| \leqslant 1} K(t)\, [\varphi(t) - \varphi(0)]\, dt.$$

---

[1] Эти операторы являются частным случаем класса сингулярных интегральных операторов, который будет обсуждаться в гл. VI.

Но

$$|\varphi(t)-\varphi(0)| \leqslant \{\sup_{|s|\leqslant 1} |(\nabla\varphi)(s)|\}\, |t|.$$

Тогда, если $t = |t|\, t'$, то

$$|K(t)[\varphi(t)-\varphi(0)]| \leqslant \{\sup_{s\in E_n} |(\nabla\varphi)(s)|\}\, |P(t')|/|t|^{n-1}.$$

Следовательно, $K(t)[\varphi(t)-\varphi(0)]$ локально интегрируема и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon\leqslant|t|\leqslant 1} K(t)\,\varphi(t)\,dt = \left|\int\limits_{|t|\leqslant 1} K(t)[\varphi(t)-\varphi(0)]\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \{\sup_{s\in E_n} |(\nabla\varphi)(s)|\} \int\limits_{|t|\leqslant 1} \{|P(t')|/|t|^{n-1}\}\,dt.$$

То, что L — обобщенная функция медленного роста, следует теперь из теоремы 3.11 гл. I.

Обобщенные функции, получаемые предельным переходом (4.4), называются обобщенными функциями *в смысле главного значения*. Чтобы указать, что L — такой линейный функционал, определенный по функции K, обычно используют следующее обозначение:

$$L(\varphi) = \text{P.V.} \int\limits_{E_n} K(t)\,\varphi(t)\,dt$$

для $\varphi \in \mathscr{S}$. [P.V. = Principal Value = Главное значение. — *Ред.*] В этом случае мы будем обозначать обобщенную функцию также буквой K.

Поскольку $K(t) = P(t)/|t|^{n+k}$, как мы только что видели, определяет обобщенную функцию (в смысле главного значения), ее преобразование Фурье $\hat{K}$ определено как обобщенная функция медленного роста. Следующая теорема оправдывает переход к пределу при $\alpha \to 0$, о котором говорилось выше:

Теорема 4.5. *Пусть $P(x)$ — гармонический многочлен на E_n, однородный степени $k \geqslant 1$. Если $K(x) = P(x)/|x|^{n+k}$, то*

$$\hat{K}(t) = \left\{ i^{-k}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)\right\} P(t)/|t|^k = \gamma_{k,0} P(t)/|t|^k.$$

Доказательство. Нам нужно показать, что

$$\text{(i)}\quad \gamma_{k,0} \int\limits_{E_n} \{P(t)/|t|^k\}\,\varphi(t)\,dt = \text{P.V.} \int\limits_{E_n} \{P(t)/|t|^{n+k}\}\,\hat{\varphi}(t)\,dt$$

для всех основных функций φ. Теорема 4.1 утверждает, что

$$\text{(ii)}\quad \gamma_{k,\alpha} \int\limits_{E_n} \{P(t)/|t|^{k+\alpha}\}\,\varphi(t)\,dt = \int\limits_{E_n} \{P(t)/|t|^{n+k-\alpha}\}\,\hat{\varphi}(t)\,dt,$$

когда $0 < \alpha < n$. При $\alpha \to 0$ левая часть равенства (ii) стремится к левой части равенства (i); следовательно, достаточно показать, что

$$\lim_{\alpha\to 0} \int\limits_{E_n} \{P(t)/|t|^{n+k-\alpha}\} \hat{\varphi}(t)\, dt = \text{P.V.} \int\limits_{E_n} \{P(t)/|t|^{n+k}\} \hat{\varphi}(t)\, dt.$$

Так как интегралы функции $P(t)$ по сферам с центрами в начале координат равны 0 и, как было отмечено выше, $K(t)[\hat{\varphi}(t) - \hat{\varphi}(0)]$ локально интегрируема, то, в силу теоремы о мажорируемой сходимости,

$$\lim_{\alpha\to 0} \int\limits_{E_n} \{P(t)/|t|^{n+k-\alpha}\} \hat{\varphi}(t)\, dt =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \int\limits_{|t|\leqslant 1} \{P(t)/|t|^{n+k-\alpha}\} \{\hat{\varphi}(t) - \hat{\varphi}(0)\}\, dt + \int\limits_{|t|>1} K(t)\hat{\varphi}(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_{|t|\leqslant 1} K(t)[\hat{\varphi}(t) - \hat{\varphi}(0)]\, dt + \int\limits_{|t|>1} K(t)\hat{\varphi}(t)\, dt.$$

Но выше было показано, что последнее выражение равно искомому пределу P.V. $\int\limits_{E_n} \{P(t)/|t|^{n+k}\} \hat{\varphi}(t)\, dt$, и теорема доказана.

Положим $Y^{(k)}(x') = P^{(k)}(x)/|x|^k$, где $x \neq 0$, $x' = x/|x|$ и $P^{(k)}$ — гармонический многочлен степени $k \geqslant 1$ (т. е. $Y^{(k)}$ — сферическая гармоника степени k); кроме того, положим $\Omega(x') = \sum\limits_{k=1}^{m} Y^{(k)}(x')$. Тогда из теоремы 4.5 следует, что $K(x) = \Omega(x')/|x|^n$ определяет обобщенную функцию в смысле главного значения, преобразование Фурье которой равно

$$\hat{K}(x) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_{k,0} Y^{(k)}(x').$$

С учетом следствия 2.3 естественно рассмотреть более общие ядра K, получаемые из функций $\Omega \in L^2(\Sigma_{n-1})$, принадлежащих замкнутому подпространству из $L^2(\Sigma_{n-1})$, порожденному сферическими гармониками $Y^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Это есть в точности пространство таких L^2-функций, что

$$\int\limits_{\Sigma_{n-1}} \Omega(x')\, dx' = 0. \tag{4.6}$$

Положим $K(x) = \Omega(x')/|x|^n$; тогда простое обобщение рассуждений, приведенных после равенства (4.4), показывает, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0<\varepsilon\leqslant|t|} K(t)\varphi(t)\, dt,$$

где φ — основная функция, определяет обобщенную функцию в смысле главного значения, которую мы будем обозначать также буквой K. При этом получим следующее обобщение теоремы 4.5:

Теорема 4.7. *Пусть Ω — функция из $L^2(\Sigma_{n-1})$, удовлетворяющая равенству* (4.6). *Тогда существует единственный набор сферических гармоник $Y^{(k)}$ степени k, таких, что*

$$\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} Y^{(k)}, \tag{4.8}$$

причем ряд сходится по норме в $L^2(\Sigma_{n-1})$. Функция, задаваемая при $x \neq 0$ равенством $K(x) = \Omega(x')/|x|^n$, определяет обобщенную функцию в смысле главного значения, преобразование Фурье которой $\hat{K}$ есть однородная функция степени 0, т. е. $\hat{K}(x) = \Omega_0(x') = \Omega_0(x/|x|)$ для $x \neq 0$. При этом $\Omega_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} Y_0^{(k)}$, где $Y_0^{(k)} = \gamma_{k,0} Y^{(k)}$, и ряд сходится по норме в $L^2(\Sigma_{n-1})$. Далее,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n \| Y_0^{(k)} \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^n \int\limits_{\Sigma_{n-1}} | Y_0^{(k)}(x') |^2 \, dx' < \infty. \tag{4.9}$$

Обратно, любая функция Ω_0, однородная степени 0, сужение которой на Σ_{n-1} квадратично-интегрируемо, удовлетворяющая равенству $\int\limits_{\Sigma_{n-1}} \Omega_0(x')\, dx' = 0$ и имеющая разложение в ряд по сферическим гармоникам, удовлетворяющее условию (4.9), *является преобразованием Фурье обобщенной функции в смысле главного значения вида $K(x) = \Omega(x')/|x|^n$, где $\Omega \in L^2(\Sigma_{n-1})$ и удовлетворяет равенству* (4.6).

Доказательство. Представление (4.8) вытекает из следствия 2.3; оттуда же и из соотношений ортогональности следствия 2.4 следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| Y^{(k)} \|^2 < \infty.$$

Из теоремы 4.5 видно, что $\gamma_{k,0} \approx k^{-n/2}$ при $k \to \infty$; следовательно, должно выполняться неравенство (4.9). Чтобы убедиться в том, что $\hat{K}$ получается из функции Ω_0 описанным выше образом, рассмотрим ядро $K^{(m)}(x) = \Omega^{(m)}(x')/|x|^n = \sum\limits_{k=1}^{m} Y^{(k)}(x')/|x|^n$. Из теоремы 4.5 следует, что преобразование Фурье функции $K^{(m)}$ (рассматриваемой как обобщенная функция в смысле главного значения) есть однородная функция степени 0, сужение которой на

Σ_{n-1} равно $\sum_{k=1}^{m} Y_0^{(k)} = \sum_{k=1}^{m} \gamma_{k,0} Y^{(k)}$. Таким образом, если φ — основная функция, то из определения преобразования Фурье обобщенной функции медленного роста следует, что

$$\int_{E_n} \hat{K}^{(m)}(x)\,\varphi(x)\,dx = \text{P.V.} \int_{E_n} K^{(m)}(x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx.$$

Поскольку $\sum_{k=1}^{m} Y_0^{(k)} \to \sum_{k=1}^{\infty} Y_0^{(k)} = \Omega_0$ в $L^2(\Sigma_{n-1})$ при $m \to \infty$ (это непосредственно следует из (4.9)), то

$$\lim_{m\to\infty} \int_{E_n} \hat{K}^{(m)}(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{E_n} \Omega_0(x/|x|)\,\varphi(x)\,dx.$$

С другой стороны, рассуждения, приведенные после равенства (4.4), показывают, что

$$\text{(4.10)} \quad \text{P.V.} \int_{E_n} K^{(m)}(x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx =$$
$$= \int_{|x|\leqslant 1} K^{(m)}(x)\,[\hat{\varphi}(x) - \hat{\varphi}(0)]\,dx + \int_{|x|>1} K^{(m)}(x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx.$$

Но из L^2-сходимости $\sum_{k=1}^{m} Y^{(k)} \to \Omega$ при $m \to \infty$ следует, что правая часть равенства (4.10) сходится к

$$\int_{|x|\leqslant 1} K(x)\,[\hat{\varphi}(x) - \hat{\varphi}(0)]\,dx + \int_{|x|>1} K(x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx = \text{P.V.} \int_{E_n} K(x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$\int_{E_n} \Omega_0(x/|x|)\,\varphi(x)\,dx = \text{P.V.} \int_{E_n} K(x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx$$

для всех основных функций φ, и из определения преобразования Фурье обобщенной функции K следует, что $\hat{K}$ равна $\Omega_0(x/|x|)$ при $x \neq 0$.

Для того чтобы доказать последнюю часть теоремы, заметим сначала, что если Ω_0 разлагается в ряд по сферическим гармоникам $\sum_{k=1}^{\infty} Y_0^{(k)}$, удовлетворяющий условию (4.9), то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} Y^{(k)}$, где $Y^{(k)} = \gamma_{k,0}^{-1} Y_0^{(k)}$, сходится в $L^2(\Sigma_{n-1})$ к функции Ω, интеграл которой по Σ_{n-1} равен 0. Применяя к этой функции Ω первую часть теоремы, получим искомое обращение.

В более широком смысле приведенные результаты показывают, что соотношение

$$\text{P.V.} \int_{E_n} K(x)\,\varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geqslant\varepsilon>0} K(x)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{|x|\leqslant 1} K(x)\,[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx + \int_{|x|>1} K(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

где φ — основная функция, а $K(x)=\Omega(x')/|x|^n$ зависит только от интегрируемости функции Ω на Σ_{n-1} и свойства (4.6). Таким образом, и в этом случае K является обобщенной функцией в смысле главного значения. Следующая теорема дает явный вид ее преобразования Фурье $\widehat{K}$.

Теорема 4.11. *Пусть* $\Omega \in L^1(\Sigma_{n-1})$ *удовлетворяет условию* (4.6). *Тогда функция, определяемая равенством* $K(x)=\Omega(x')/|x|^n$ *при* $x\neq 0$, *задает обобщенную функцию в смысле главного значения, преобразование Фурье которой* $\hat{K}$ *есть однородная функция степени* 0, *так что* $\hat{K}(x)=\Omega_0(x')=\Omega_0(x/|x|)$ *при* $x\neq 0$. *При этом*

$$\Omega_0(x') = -\int_{\Sigma_{n-1}} \Omega(t')\left[\frac{i\pi}{2}\operatorname{sgn}(x'\cdot t') + \log|x'\cdot t'|\right]dt'$$

для $x'\in\Sigma_{n-1}$, *где* sgn — *знак-функция:* $\operatorname{sgn}(s)=1$ *при* $s>0$, $\operatorname{sgn}(s)=-1$ *при* $s<0$, $\operatorname{sgn}(0)=0$.

Доказательство. Пусть $\hat{K}_\varepsilon^N$ — преобразование Фурье функции из $L^1(E_n)$ со значениями $\Omega(x')/|x|^n$ при $0<\varepsilon<|x|<N$ и 0 для $|x|$ вне этого интервала.

Положим $x=rx'$ и $t=\rho t'$, где $x', t'\in\Sigma_{n-1}$; тогда

$$\hat{K}_\varepsilon^N(x) = \int_{\varepsilon<|t|<N} e^{-2\pi i x\cdot t}\,\frac{\Omega(t')}{|t|^n}\,dt = \int_{\Sigma_{n-1}} \Omega(t')\left\{\int_\varepsilon^N \frac{e^{-2\pi i r\rho(x'\cdot t')}}{\rho}\,d\rho\right\}dt'.$$

Поскольку Ω удовлетворяет условию (4.6), последний интеграл равен

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \Omega(t')\left\{\int_\varepsilon^N \frac{\cos 2\pi r\rho(x'\cdot t') - \cos 2\pi r\rho}{\rho}\,d\rho\right\}dt' -$$

$$- i\int_{\Sigma_{n-1}} \Omega(t')\left\{\int_\varepsilon^N \frac{\sin 2\pi r\rho(x'\cdot t')}{\rho}\,d\rho\right\}dt'.$$

Но, как хорошо известно,

$$\left|\int_{\varepsilon}^{N} \frac{\sin 2\pi r\rho\,(x'\cdot t')}{\rho}\,d\rho\right| = \left|\int_{2\pi r\varepsilon(x'\cdot t')}^{2\pi rN(x'\cdot t')} \frac{\sin s}{s}\,ds\right|$$

мажорируется постоянной, не зависящей от ε, N, r и $x'\cdot t'$, и

$$\lim_{\varepsilon\to 0, N\to\infty} \int_{\varepsilon}^{N} \frac{\sin 2\pi r\rho\,(x'\cdot t')}{\rho}\,d\rho = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x'\cdot t').$$

Кроме того, при $x'\cdot t' \neq 0$

$$\int_{\varepsilon}^{N} \frac{\cos 2\pi r\rho\,(x'\cdot t') - \cos 2\pi r\rho}{\rho}\,d\rho = \int_{2\pi r|x'\cdot t'|\varepsilon}^{2\pi r|x'\cdot t'|N} \frac{\cos s}{s}\,ds - \int_{2\pi r\varepsilon}^{2\pi rN} \frac{\cos s}{s}\,ds =$$

$$= \int_{2\pi r|x'\cdot t'|\varepsilon}^{2\pi r\varepsilon} \frac{\cos s}{s}\,ds - \int_{2\pi r|x'\cdot t'|N}^{2\pi rN} \frac{\cos s}{s}\,ds.$$

Каждый из двух последних интегралов по абсолютной величине не превосходит $\log(1/|x'\cdot t'|)$, причем, как показывают простые вычисления,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{2\pi r|x'\cdot t'|\varepsilon}^{2\pi r\varepsilon} \frac{\cos s}{s}\,ds = \log\frac{1}{|x'\cdot t'|}$$

и

$$\lim_{N\to\infty} \int_{2\pi r|x'\cdot t'|N}^{2\pi rN} \frac{\cos s}{s}\,ds = 0.$$

Таким образом, мы показали, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0, N\to\infty} \int_{\varepsilon}^{N} \frac{e^{-2\pi i r\rho(x'\cdot t')}}{\rho}\,d\rho = -\log|x'\cdot t'| - i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x'\cdot t')$$

и что эта сходимость мажорируется постоянной (не зависящей от ε, N, r и $x'\cdot t'$), умноженной на $1+\log(1/|x'\cdot t'|)$.

Из теоремы Фубини немедленно следует, что интеграл $\int_{\Sigma_{n-1}} |\Omega(t')|\,[1+\log(1/|x'\cdot t'|)]\,dt'$ конечен для почти всех $x'\in \Sigma_{n-1}$ и определяет интегрируемую на Σ_{n-1} функцию. Таким образом, в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости,

$$\lim_{\varepsilon\to 0, N\to\infty} \hat{K}_{\varepsilon}^{N}(x') = -\int_{\Sigma_{n-1}} \Omega(t')\left[\frac{i\pi}{2}\operatorname{sgn}(x'\cdot t') + \log|x'\cdot t'|\right]dt'.$$

С другой стороны, согласно формуле умножения,

$$\int_{E_n} \hat{K}_\varepsilon^N (x') \varphi(x)\,dx = \int_{\varepsilon<|x|<N} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} \hat{\varphi}(x)\,dx,$$

где φ — любая основная функция. Теорема 4.11 теперь легко устанавливается переходом к пределу при $\varepsilon \to 0$ и $N \to \infty$ и использованием определения преобразования Фурье обобщенной функции в смысле главного значения.

Следствие 4.12. *Если $\Omega \in L^2(\Sigma_{n-1})$, то функция Ω_0 непрерывна.*

Доказательство. В силу теоремы 4.7, Ω допускает разложение в ряд по сферическим гармоникам $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Y^{(k)}$, а $\Omega_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} Y_0^{(k)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_{k,0} Y^{(k)}$. Введем обозначения $\Omega^{(m)} = \sum\limits_{k=1}^{m} Y^{(k)}$ и $\Omega_0^{(m)} = \sum\limits_{k=1}^{m} Y_0^{(k)}$. Тогда $\Omega_0^{(m)}$ непрерывна и, в силу теоремы 4.11,

$$\Omega_0(x') - \Omega_0^{(m)}(x') = \\ = -\int_{\Sigma_{n-1}} [\Omega(t') - \Omega^{(m)}(t')] \left[\frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn}(x' \cdot t') + \log|x' \cdot t'|\right] dt'.$$

Отсюда, в силу неравенства Коши — Шварца,

$$|\Omega_0(x') - \Omega_0^{(m)}(x')| \leqslant \\ \leqslant \left(\int_{\Sigma_{n-1}} |\Omega(t') - \Omega^{(m)}(t')|^2\,dt'\right)^{1/2} \left(\int_{\Sigma_{n-1}} \left(\frac{\pi^2}{4} + |\log|x' \cdot t'||^2\right) dt'\right)^{1/2}.$$

Но интеграл

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \left(\frac{\pi^2}{2} + |\log|x' \cdot t'||^2\right) dt'$$

конечен и не зависит от x', а $\int\limits_{\Sigma_{n-1}} |\Omega(t') - \Omega^{(m)}(t')|^2\,dt' \to 0$ при $m \to \infty$. Следовательно, $\{\Omega_0^{(m)}\}$ равномерно сходится к Ω_0. Так как функции $\Omega_0^{(m)}$ непрерывны при $m = 1, 2, \ldots$, то Ω_0 тоже непрерывна, и следствие доказано.

Только что введенные обобщенные функции в смысле главного значения $\Omega(x)/|x|^n$ дают пример обобщенных функций типа (L^2, L^2), обсуждавшихся в § 3 гл. I. Как будет показано в гл. VI, они являются также обобщенными функциями типа (L^p, L^p), $1 < p < \infty$.

Следующее применение связано с еще одним методом суммирования интегралов. В гл. I (см. (1.12)) были введены Ф-средние

$$M_{\varepsilon,\Phi}(h) = \int_{E_n} \Phi(\varepsilon x)\, h(x)\, dx$$

интеграла $\int_{E_n} h$, когда Φ принадлежит C_0 и удовлетворяет равенству $\Phi(0) = 1$. Когда $\Phi(x) = e^{-|x|}$, имеем средние Абеля, а средние Гаусса — Вейерштрасса получаются при $\Phi(x) = e^{-|x|^2}$. Столь же важный метод суммирования — *суммирование по Бохнеру — Риссу* — получается, когда

$$\Phi_\delta(x) = \Phi(x) = \begin{cases} (1-|x|^2)^\delta & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1 \end{cases}$$

для $\delta > 0$. В этом случае обычно полагают $\varepsilon = 1/R$, так что

$$M_{\varepsilon,\Phi}(h) = M_{(1/R),\Phi}(h) = \int_{|x| \leqslant R} \left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right)^\delta h(x)\, dx.$$

Если $f \in L^1(E_n)$, $\varphi = \hat{\Phi}$ и $h(x) = \hat{f}(x)\, e^{2\pi i t \cdot x}$, то (см. теорему 1.16 гл. I)

$$S_R^\delta(t; f) = S_R^\delta(t) = \int_{|x| \leqslant R} \hat{f}(x)\, e^{2\pi i x \cdot t} \left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right)^\delta dx =$$

$$= \int_{E_n} f(x)\, R^n \varphi(R(x-t))\, dx$$

суть средние Бохнера — Рисса интеграла $\int_{E_n} \hat{f}(x)\, e^{2\pi i x \cdot t} dx$, определяющие обратное преобразование Фурье функции f. Если $\varphi \in L^1(E_n)$, то, в силу теоремы 1.18 гл. I, S_R^δ сходятся к f по норме, а если, кроме того, φ удовлетворяет предположениям теоремы 1.25 гл. I, то

$$\lim_{R \to \infty} S_R^\delta(t) = f(t) \text{ почти всюду.}$$

Покажем, что эта форма обращения преобразования Фурье справедлива, когда $\delta > (n-1)/2$ [1].

Для этого вычислим преобразование Фурье $\varphi = \hat{\Phi}$ функции Φ. При проведении этих вычислений будет полезным следующее тождество для функций Бесселя:

[1] Число $(n-1)/2$ называется *критическим показателем* для суммирования по Бохнеру — Риссу. Мы встретимся с ним снова в гл. VII.

Лемма 4.13. *Пусть* $\mu > -{}^1/_2$; *тогда*

$$J_{\mu+\nu+1}(t) = \frac{t^{\nu+1}}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\int_0^1 J_\mu(ts)\, s^{\mu+1}(1-s^2)^\nu ds$$

для всех $\nu > -1$ *и* $t > 0$.

Доказательство. Разложим e^{its} в степенной ряд $\sum_{j=0}^{\infty}(its)^j/j!$; тогда из определения $J_k(t)$, $k > -{}^1/_2$, данного в § 3, легко получаем, что

$$J_k(t) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{(t/2)^{k+2j}}{j!\ \Gamma(j+k+1)}\ ^{1)}. \tag{4.14}$$

Таким образом, с учетом равенства (4.14) имеем

$$\int_0^1 J_\mu(ts)\, s^{\mu+1}(1-s^2)^\nu ds =$$

$$= \int_0^1 \left\{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{(ts/2)^{\mu+2j}}{j!\ \Gamma(j+\mu+1)}\right\} s^{\mu+1}(1-s^2)^\nu ds =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{(t/2)^{\mu+2j}}{j!\ \Gamma(j+\mu+1)}\,\frac{1}{2}\int_0^1 r^{\mu+j}(1-r)^\nu dr =$$

$$= \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{t^{\nu+1}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{(t/2)^{\mu+\nu+1+2j}}{j!\ \Gamma(\mu+\nu+j+2)} =$$

$$= \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{t^{\nu+1}} J_{\mu+\nu+1}(t),$$

и лемма доказана.

---

[1]) При выводе этой формулы полезно заметить, что определяющий J_k интеграл равен $2\int_0^1 (\cos ts)(1-s^2)^{(2k-1)/2}ds$. При этом коэффициенты степенного ряда (4.14) содержат выражения $\int_0^1 s^{2j}(1-s^2)^{(2k-1)/2}ds$, которые легко вычисляются с помощью хорошо известного соотношения

$$\Gamma(x)\,\Gamma(y)/\Gamma(x+y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}du.$$

7 Зак. 437

Теорема 4.15. *Если функция Φ определяется равенством*

$$\Phi(t) = \begin{cases} (1-|t|^2)^\delta & \text{при } |t| \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } |t| > 1, \end{cases}$$

где $\delta > 0$, *то*

$$\hat{\Phi}(x) = \pi^{-\delta}\Gamma(\delta+1)\ |x|^{-[(n/2)+\delta]} J_{n/2+\delta}(2\pi|x|).$$

Доказательство. В силу теоремы 3.3

$$\hat{\Phi}(x) = 2\pi|x|^{-(n-2)/2}\int_0^1 (1-|s|^2)^\delta J_{(n-2)/2}(2\pi|x|s)\, s^{n/2}ds.$$

Применяя теперь лемму 4.13 с $\nu = \delta$ и $\mu = (n-2)/2$, видим, что последнее выражение равно

$$2\pi|x|^{-(n-2)/2}(2\pi)^{-\delta-1}2^\delta\Gamma(\delta+1)|x|^{-\delta-1}J_{(n-2)/2+\delta+1}(2\pi|x|),$$

что, очевидно, приводится к искомому выражению для $\hat{\Phi}(x)$.

Из равенств (3.12) и (4.14) следует, что $\varphi = \hat{\Phi}$ принадлежит пространству $L^1(E_n)$ при $\delta > (n-1)/2$; кроме того, φ удовлетворяет дополнительным предположениям теорем 1.18 и 1.25 гл. I, так что справедливо

Следствие 4.16. *Если* $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p < \infty$, *а* $S_R^\delta = \varphi_{(1/R)} * f$, *где* $\varphi_{(1/R)}(x) = R^n\varphi(Rx)$ *для* $R > 0$ *и* $\delta > (n-1)/2$, *то*:

(a) $\|S_R^\delta - f\|_p \to 0$ *при* $R \to \infty$;

(b) $\lim\limits_{R\to\infty} S_R^\delta(x) = f(x)$ *для всех* x *из лебегова множества функции* f *(в частности, это равенство выполняется для почти всех* $x \in E_n$*).*

5. Дальнейшие результаты

5.1. Теорема 1.1 легко обобщается до результата, описывающего связь между преобразованием Фурье и произвольным невырожденным линейным отображением пространства E_n на себя. Пусть σ — такое отображение, и пусть $\tilde{\sigma}$ — отображение, обратное к сопряженному к σ (или сопряженное к обратному к σ). Отображение $\tilde{\sigma}$ называется *контраградиентным* к σ. Определив действие отображения σ на функцию f равенством $(R_\sigma f)(x) = f(\sigma x)$, получим следующий результат: если $f \in L^1(E_n)$, то $(R_\sigma f)^\wedge = |\det\sigma|^{-1}R_{\tilde{\sigma}}\hat{f}$, т. е. $\mathcal{F}R_\sigma = |\det\sigma|^{-1}R_{\tilde{\sigma}}\mathcal{F}$. Доказательство не сложнее, чем доказательство теоремы 1.1: поскольку якобиан за-

мены переменных $s = \sigma t$ равен $|\det \sigma|^{-1}$, имеем

$$(R_\sigma f)^\wedge(t) = \int\limits_{E_n} e^{-2\pi i t \cdot x} f(\sigma x)\, dx = |\det \sigma|^{-1} \int\limits_{E_n} e^{-2\pi i (t \cdot \sigma^{-1} s)} f(s)\, ds =$$
$$= |\det \sigma|^{-1} \int\limits_{E_n} e^{-2\pi i (\tilde{\sigma} t \cdot s)} f(s)\, ds = |\det \sigma|^{-1} (R_{\tilde{\sigma}} \hat{f})(t).$$

5.2. На тесную связь ортогональных преобразований и преобразования Фурье указывает еще следующий результат (сообщенный нам Р. Койфманом). Пусть σ — непрерывное взаимно однозначное отображение E_n на себя, такое, что R_σ коммутирует с преобразованием Фурье; тогда σ — ортогональное преобразование. Чтобы убедиться в этом, заметим сначала, что по предположению

$$(R_\sigma \mathcal{F} f)(0) = (\mathcal{F} R_\sigma f)(0) \text{ для всех } f \in L^1(E_n).$$

Применяя это равенство к функции $f(x) = g(x)\, e^{-2\pi i \sigma^{-1}(x) \cdot y}$, $x \in E_n$, с фиксированным $y \in E_n$, получим

$$0 = \int\limits_{E_n} [e^{-2\pi i x \cdot \sigma(0)} e^{-2\pi i \sigma^{-1}(x) \cdot y} g(x) - e^{-2\pi i x \cdot y} g(\sigma x)]\, dx.$$

Но, опять по предположению, $\int\limits_{E_n} e^{-2\pi i x \cdot y} g(\sigma x) dx = \int\limits_{E_n} e^{-2\pi i x \cdot \sigma(y)} g(x) dx$, так что

$$0 = \int\limits_{E_n} [e^{-2\pi i (x \cdot h + \sigma^{-1}(x) \cdot y)} - e^{-2\pi i x \cdot \sigma(y)}]\, g(x)\, dx$$

для всех g из $L^1(E_n)$, где $h = \sigma(0)$. Следовательно, $e^{-2\pi i (x \cdot h + \sigma^{-1}(x) \cdot y)} = e^{-2\pi i x \cdot \sigma(y)}$ для всех x, $y \in E_n$. Таким образом, $x \cdot h + \sigma^{-1}(x) \cdot y = x \cdot \sigma(y) + 2k\pi$ для некоторого целого k; при этом из непрерывности σ следует, что k — постоянная. Полагая $x = 0$, получим $\sigma^{-1}(0) \cdot y = 2k\pi$ для всех $y \in E_n$, откуда $k = 0$. Значит, $h = \sigma(0) = 0$, поскольку $\sigma^{-1}(0) = 0$. Следовательно, мы показали, что $\sigma^{-1}(x) \cdot y = x \cdot \sigma(y)$ или, эквивалентно, $x \cdot y = \sigma(x) \cdot \sigma(y)$ для всех $y \in E_n$. Итак, σ — изометрия, отображающая 0 в 0. Но отсюда, очевидно, следует, что σ — ортогональное преобразование.

5.3. Пусть $\beta(x, y)$, $x, y \in E_n$, — невырожденная вещественная симметрическая квадратичная форма (необязательно положительная). Тогда отображение $t \to \hat{x}(t) = e^{2\pi i \beta(x,t)}$, где $x \in E_n$ фиксировано, называется *характером* (под этим понимается непрерывное отображение пространства E_n в множество комплексных чисел, равных 1 по модулю, такое, что $\hat{x}(s+t) = \hat{x}(s)\, \hat{x}(t)$ для любых

s и t из E_n). Введя умножение по формуле $\hat{x}_1 \hat{x}_2 (t) = \hat{x}_1 (t) \hat{x}_2 (t)$, множество всех характеров можно превратить в группу: *группу характеров* на E_n. Отображение $x \to \hat{x}$ есть изоморфизм E_n в его группу характеров. Нетрудно показать, что оно является отображением «на»; таким образом, мы можем «отождествить» E_n с его группой характеров. Ясно, что это отождествление зависит от билинейной формы β.

Определение характера и группы характеров очевидным образом обобщается на произвольную локально компактную абелеву группу G, однако в общем случае G и ее группа характеров неизоморфны. В абстрактном гармоническом анализе преобразованием Фурье функции f из $L^1(G)$ называется функция $\hat{f}$, значение которой в точке $\hat{x}$ равно $\hat{f}(\hat{x}) = \int\limits_G f(t)\, \overline{\hat{x}(t)}\, d\mu(t)$, где μ — мера Хаара. В терминах описанного выше отождествления E_n и $\hat{E}_n$ мы получим «преобразование Фурье» $T = T_\beta$ для каждой невырожденной вещественной симметрической квадратичной формы β: $(Tf)(x) = \int\limits_{E_n} \overline{\hat{x}(t)}\, f(t)\, dt = \int\limits_{E_n} e^{-2\pi i\beta(x,t)} f(t)\, dt$. При $\beta(x, t) = x \cdot t$ имеем обычное преобразование Фурье. В этой главе мы использовали тесную связь между преобразованием Фурье и ортогональной группой. В общем случае T_β аналогичным образом связано с *ортогональной группой, ассоциированной с* β: группой $O_\beta(n)$ всех линейных преобразований σ пространства E_n, оставляющих инвариантной квадратичную форму β (т. е. $\beta(\sigma x, \sigma y) = \beta(x, y)$ для всех $x, y \in E_n$). Пусть $\sigma \in O_\beta(n)$, а R_σ обозначает действие преобразования σ на функции, определенные на E_n (см. п. 5.1); тогда рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 1.1, показывают, что $R_\sigma T_\beta = T_\beta R_\sigma$. Более того, результат 5.2 также обобщается на этот случай: если σ — непрерывное взаимно однозначное преобразование E_n на себя, такое, что R_σ коммутирует с T_β, то $\sigma \in O_\beta(n)$.

5.4. Мы уже подчеркивали важность группы растяжений. Роль этих преобразований еще более прояснится в связи с рассмотрением преобразования Меллина, в терминах которого некоторым полученным в этой главе результатам можно дать новую интерпретацию.

Пусть f — комплекснозначная функция, определенная на интервале $(0, \infty)$ и удовлетворяющая условию интегрируемости

$$\int\limits_0^\infty \frac{|f(x)|}{x}\, dx < \infty.$$

Тогда ее *преобразование Меллина* $\mathcal{M}_f(s) = \mathcal{M}(s)$ определяется равенством

$$\mathcal{M}(s) = \int_0^\infty f(x)\, x^s \frac{dx}{x}$$

при $\operatorname{Re} s = 0$. Пусть f_1 и f_2 удовлетворяют условию интегрируемости; тогда этому условию удовлетворяет их *мультипликативная свертка* $f_1 \cdot f_2$, определяемая равенством

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = \int_0^\infty f_1(x/y)\, f_2(y) \frac{dy}{y},$$

причем $\mathcal{M}_{f_1 \cdot f_2}(s) = \mathcal{M}_{f_1}(s)\, \mathcal{M}_{f_2}(s)$. Преобразование Меллина есть мультипликативный аналог преобразования Фурье, и многие его элементарные свойства можно вывести из свойств преобразования Фурье на E_1 заменой переменных $x \to e^x$, переводящей E_1 в $(0, \infty)$. В этой связи представляют интерес следующие тождества:

(a) $$\mathcal{M}_f(s) = 2^{a+s-\mu-1}\Gamma\left(\frac{a+s}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\mu - \frac{a+s}{2} + 1\right)$$

при $f(x) = x^{a-\mu} J_\mu(x)$, где $a > 0$, $\mu > a - {}^1/_2$. Случай, когда μ — целое или полуцелое, по существу эквивалентен теореме 4.1 (если считать теорему 3.10 известной).

(b) Пусть $f_1(x) = x^{-\mu+1} J_\mu(x)$ и $f_2(x) = x^{-2\mu-2\nu+1}(x^2-1)^\nu / 2^\nu \Gamma(\nu+1)$ при $x \geqslant 1$, $f_2(x) = 0$ при $0 < x < 1$. Тогда $f(x) = (f_1 \cdot f_2)(x) = x^{-\mu-\nu+1} J_{\mu+\nu}(x)$ при всех $\nu > -1$ и $\mu > -{}^1/_2$. Это тождество эквивалентно утверждению леммы 4.13. Другое доказательство этой леммы можно получить, показав, что $\mathcal{M}_f(s) = \mathcal{M}_{f_1}(s)\, \mathcal{M}_{f_2}(s)$.

Доказательство тождества (а) и другие сведения о преобразовании Меллина имеются в книге Титчмарша [2].

5.5. Во второй главе было показано, что гармоническая функция имеет непрерывные частные производные всех порядков (см. теорему 1.7 гл. II). Из интегрального представления Пуассона (см. теорему 1.10 и следствие 1.11) и теоремы 2.10 немедленно следует, что гармоническая функция вещественно-аналитична.

5.6. Лемма 2.11 эквивалентна утверждению, что единственные дифференциальные многочлены с постоянными коэффициентами, коммутирующие с вращениями,— это многочлены от лапласиана. Точнее, при $n > 1$ эта лемма эквивалентна следующему утверждению:

Пусть $P(D)$, $D = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$, есть дифференциальный многочлен на E_n с постоянными коэффициентами; тогда $P(D)\, R_\sigma =$

$= R_\sigma P(D)$ *для всех вращений* σ *тогда и только тогда, когда* $P(D) = c_0 I + c_1\Delta + \cdots + c_m \Delta^m$, *где* $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_n^2$ — *лапласиан.*

5.7. Мы определили ультрасферические многочлены P_k^λ в терминах производящей функции $(1 - 2rt + r^2)^{-\lambda}$. Однако при $\lambda = 0$ удобнее рассматривать *многочлены Чебышева* T_k, для которых производящая функция равна

$$\log(1 - 2rt + r^2) = -2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} T_k(t)\, r^k.$$

В такой ситуации необязательно исключать двумерный случай, как это часто делалось в § 2. Например, если использовать многочлены Чебышева, теорема 2.14 будет справедливой и при $n = 2$.

5.8. Важная связь между группой вращений $SO(n)$ и сферическими гармониками возникает при изучении унитарных представлений этой группы. Отображение $\sigma \to R_{\sigma^{-1}}$, где $R_{\sigma^{-1}}$ — оператор на $L^2(\Sigma_{n-1})$, определяемый равенством $(R_{\sigma^{-1}} f)(x) = f(\sigma^{-1} x)$, является унитарным представлением группы $SO(n)$. При этом сужение $R_{\sigma^{-1}}$ на какое-либо подпространство $\mathcal{H}_k$, $k = 0, 1, \ldots$, дает неприводимое представление группы $SO(n)$. Когда размерность n равна 3, все неприводимые представления группы $SO(n)$ можно получить таким способом. Группу $SO(n - 1)$ можно естественным образом отождествить с подгруппой $G(n, x')$ группы $SO(n)$, состоящей из всех вращений σ, оставляющих неподвижной фиксированную точку $x' \in \Sigma_{n-1}$. Из леммы 2.8 видно, что в каждом из подпространств $\mathcal{H}_k$ существует ненулевой вектор (а именно $Z_{x'}$), оставляемый неподвижным всеми операторами R_σ, где σ пробегает подгруппу $G(n, x')$ $(\sim SO(n - 1))$. Среди всех неприводимых представлений группы $SO(n)$ представления, описанные выше, с точностью до унитарной эквивалентности характеризуются существованием такого вектора, инвариантного относительно $SO(n - 1)$ (см. Вейль Г. [1] и Борнер [1]).

5.9. Следствие 3.12 обобщается на случай $\Omega \in L^p(\Sigma_{n-1})$, $p > 1$. Отличие в доказательстве несущественно: вместо неравенства Шварца используется неравенство Гёльдера, а для приближения функций сферическими гармониками вместо L^2-нормы используется L^p-норма. Дальнейшее уточнение этих рассуждений показывает, что результат все еще справедлив, когда $|\Omega| \log^+ |\Omega|$ интегрируема (где $\log^+ x = \log x$ при $x \geqslant 1$ и $\log^+ x = 0$ при $0 < x < 1$).

5.10. Аналоги подпространств $\mathfrak{H}_k$ можно, очевидно, определить и для $L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Заметим, что если $f(x) = f_0(|x|)P(x) \in$

$\in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, то ее преобразование Фурье $\hat{f}$ дается формулой (3.10), где сходимость понимается в смысле $L^{p'}(E_n)$-нормы (см. (1.2) гл. V). При этом оценки леммы 3.11 для функций Бесселя приводят к следующим утверждениям: (a) $\hat{f}(x)$ эквивалентна функции, непрерывной при $x \neq 0$, если $1 \leqslant p < 2n/(n+1)$; (b) если $k < (1/p - {}^1/_2)\,n - {}^1/_2$, то $\hat{f}$ при $x \neq 0$ принадлежит к классу C^k; (c) при $p = 1$ последнее условие можно заменить на $k \leqslant (n-1)/2$ (результаты такого типа были сообщены нам Н. Вараполусом). Эти утверждения являются простыми следствиями леммы 3.11, неравенства Гёльдера и равенства $(t^{-k} J_k(t))' = -t^{-k} J_{k+1}(t)$ (см. (3.2)).

Библиографические замечания

Мы привели только те свойства функций Бесселя, которые были необходимы для изучения преобразования Фурье. Полное рассмотрение этого предмета можно найти в книге Ватсона [1] или в труде «Высшие трансцендентные функции» под ред. Эрдейи [1], т. 2. В этом же труде читатель может найти дальнейшие сведения о сферических гармониках, многочленах Гегенбауэра и Чебышева. Более ранние результаты о действии преобразования Фурье на пространствах $\mathfrak{H}_k$ см. у Хекке [1], Бохнера [6] и Герца [1]. Другое доказательство теоремы 4.1 см. у Кальдерона [3]. Преобразования Фурье ядер $K(x) = \Omega(x')/|x|^n$ впервые были подробно изучены Михлиным [1] и Кальдероном и Зигмундом [5]. Свойства группы вращений можно использовать для дальнейшего развития результатов, полученных в этой главе. См. Виленкин [1], Койфман и Вейс [1].

Глава V

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОПЕРАТОРОВ

Пусть T — линейный оператор, отображающий некоторое линейное пространство $\mathcal{A}$ в другое линейное пространство $\mathcal{B}$. Пусть A_0, A_1 — банаховы подпространства пространства $\mathcal{A}$, а B_0, B_1 — банаховы подпространства пространства $\mathcal{B}$, такие, что оператор T, суженный на A_i, непрерывно отображает его в B_i, $i = 0, 1$. В случае когда это имеет место, часто можно показать, что существует бесконечно много пар «промежуточных» банаховых пространств (A, B), $A \subset \mathcal{A}$, $B \subset \mathcal{B}$, таких, что сужение оператора T на A непрерывно отображает A в B. Общие теоремы такого рода называются *интерполяционными теоремами* для линейных операторов и имеют много важных приложений в гармоническом анализе. Мы уже встретились с примером подобной ситуации, когда $\mathcal{A} = \mathcal{B}$— пространство обобщенных функций медленного роста, T — преобразование Фурье, $A_0 = L^1(E_n)$, $B_0 = L^\infty(E_n)$ и $A_1 = L^2(E_n) = B_1$. В этом случае сужение оператора T на $L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, непрерывно отображает это пространство в $L^q(E_n)$, где $(1/p) + (1/q) = 1$. Это следует из основной интерполяционной теоремы для пространств L^p — интерполяционной теоремы М. Рисса. Мы изучим эту теорему и некоторые ее приложения в первом параграфе этой главы. Существует другая интерполяционная теорема, где не налагается такое сильное условие, как ограниченность в «концевых точках» (A_0, B_0) и (A_1, B_1); более того, можно заменить условие линейности T некоторыми более слабыми условиями. Эта теорема, известная как теорема Марцинкевича, применяется к оператору максимальной функции $f \to m_f$, который был изучен во второй главе. Параграф 2 этой главы посвящен приложениям теоремы Марцинкевича. Содержание этой теоремы лучше всего проясняется, когда она обобщается на семейство функциональных пространств, содержащее пространства L^p. Это семейство — пространства $L(p, q)$, а также обобщенная версия теоремы Марцинкевича изучаются в § 3. В § 4 строится обобщение теоремы М. Рисса на случай, когда операторы изменяются достаточно гладким образом на «промежуточных» парах банаховых пространств.

1. Теорема М. Рисса о выпуклости и интерполяция операторов, определенных на пространствах L^p

В предыдущих главах мы встретили ряд операторов, действующих на пространствах L^p. Один класс таких операторов состоит из сверточных операторов, определяемых функциями из $L^p(E_n)$: фиксируя $f \in L^p(E_n)$, мы получаем оператор T, переводящий функцию $g \in L^1(E_n)$ в функцию $f * g$. Из теоремы 1.3 гл. I видно, что T — ограниченный оператор, определенный на $L^1(E_n)$, со значениями в $L^p(E_n)$, причем операторная норма $\| T \|$ [1]) не пре-

---

[1]) Если T — ограниченное преобразование из L^r в L^s, то мы обозначим его норму $\| T \|$, т. е. $\| T \| = \inf \{k \geqslant 0;\ \| Tf \|_s \leqslant k \| f \|_r$ для всех $f \in L^r\}$.

восходит $\|f\|_p$. С другой стороны, прямое применение неравенства Гёльдера показывает, что T, кроме того, непрерывно отображает $L^{p'}(E_n)$ в $L^\infty(E_n)$, где $(1/p)+(1/p')=1$, причем, как и в предыдущем случае, операторная норма $\|T\|$ не превосходит $\|f\|_p$. Поскольку T определен на $L^1(E_n)$ и на $L^{p'}(E_n)$, существует естественное продолжение оператора T на все пространства $L^r(E_n)$, когда $1\leqslant r\leqslant p'$. Пусть $g\in L^r(E_n)$; тогда существуют $g_1\in L^1(E_n)$ и $g_2\in L^{p'}(E_n)$, такие, что $g=g_1+g_2$, и можно определить Tg как Tg_1+Tg_2 (ясно, что Tg не зависит от конкретного выбора разбиения g в сумму g_1+g_2)[1]. Естественно, следовательно, спросить, отображает ли T пространство $L^r(E_n)$ непрерывно в некоторое пространство $L^q(E_n)$? Мы уже упоминали без доказательства (см. (4.3) гл. I), что это имеет место, когда $(1/q)=(1/p)+(1/r)-1$, причем $\|T\|$ опять не превосходит $\|f\|_p$, т. е.

$$\|f*g\|_q\leqslant\|f\|_p\|g\|_r \tag{1.1}$$

для всех $f\in L^p(E_n)$ и $g\in L^r(E_n)$. В этом параграфе будет показано, что это неравенство (известное как *неравенство Юнга*) легко получается из общего результата для линейных операторов, действующих в пространствах L^p.

Этот общий результат можно применить и к преобразованию Фурье $\mathscr{F}$. Мы рассматривали $\mathscr{F}$ в основном как линейный оператор, определенный на $L^1(E_n)$ и $L^2(E_n)$. Теорема 1.1 (а) гл. I утверждает, что первое пространство непрерывно отображается в $L^\infty(E_n)$ с операторной нормой $\leqslant 1$, а теорема Планшереля показывает, что второе пространство отображается на себя с операторной нормой, равной 1. По причинам, приведенным в предыдущем абзаце, $\mathscr{F}$ имеет естественное продолжение на «промежуточные» пространства $L^p(E_n)$, $1\leqslant p\leqslant 2$ (см. также замечания в конце § 2 гл. I). Будет показано, что эти пространства непрерывно отображаются оператором $\mathscr{F}$ в $L^{p'}(E_n)$, где $(1/p)+(1/p')=1$, с операторной нормой $\leqslant 1$. Это означает, что если $f\in L^p(E_n)$, $1\leqslant p\leqslant 2$, то $\hat f=\mathscr{F}f\in L^{p'}(E_n)$ и

$$\|\hat f\|_{p'}\leqslant\|f\|_p. \tag{1.2}$$

Этот результат известен как *неравенство Хаусдорфа — Юнга.*

Для того чтобы сформулировать вышеупомянутый общий результат для линейных операторов — *теорему М. Рисса о выпуклости,* необходимо ввести несколько новых понятий и обозначений.

---

[1] Например, положив $g_1(x)=g(x)$, когда $|g(x)|\geqslant 1$, и $g_1(x)=0$, когда $|g(x)|<1$, получим такое разбиение.

Пусть $(M, \mathcal{M}, \mu)$ — пространство с мерой [1]. Обозначим через $L^p(M)$, $1 \leqslant p < \infty$, пространство всех комплекснозначных функций f, таких, что $\| f \|_p = (\int\limits_M | f |^p \, d\mu)^{1/p} < \infty$. Как и в случае, когда $M = E_n$ (см. начало главы I), мы используем то же самое обозначение $L^p(M)$ для пространства классов эквивалентности, получаемых, если считать эквивалентными две функции, совпадающие почти всюду; полагая норму класса, содержащего функцию f, равной $\| f \|_p$, получим банахово пространство. Те же замечания относятся и к пространству $L^\infty(M)$ существенно ограниченных измеримых функций, если определить $\| f \|_\infty$ для $f \in L^\infty(M)$ как существенную верхнюю грань $| f |$.

Пусть f — измеримая функция; *срезом* функции f называется функция g, определяемая равенствами $g(x) = f(x)$ при $r_1 < | f(x) | \leqslant r_2$ и $g(x) = 0$ в противном случае, где r_1 и r_2 — некоторые неотрицательные числа. Пусть T — оператор, отображающий линейное пространство D измеримых на $(M, \mathcal{M}, \mu)$ функций в пространство измеримых функций, определенных на другом пространстве с мерой $(N, \mathcal{N}, \nu)$. Будем считать, что D содержит характеристические функции всех множеств конечной меры и что для каждой функции $f \in D$ любой ее срез g принадлежит D. Если существует постоянная $k > 0$, такая, что

$$\left(\int\limits_N | Tf |^q d\nu\right)^{1/q} = \| Tf \|_q \leqslant k \| f \|_p = k \left(\int\limits_M | f |^p d\mu\right)^{1/p}$$

для всех $f \in D \cap L^p(M)$, то говорят, что T — оператор *типа* (p, q). Наименьшее число k, для которого выполняется это неравенство, называется (p, q)*-нормой* оператора T.

Теорему М. Рисса о выпуклости можно теперь сформулировать следующим образом:

Теорема 1.3. *Пусть T — линейный оператор типа (p_i, q_i) с (p_i, q_i)-нормой, равной k_i, $i = 0, 1$; тогда T есть оператор типа (p_t, q_t) с (p_t, q_t)-нормой $k_t \leqslant k_0^{1-t} k_1^t$, где $1/p_t = (1-t)/p_0 + t/p_1$ и $1/q_t = (1-t)/q_0 + t/q_1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$* [2].

Прежде чем доказать эту теорему, покажем, как из нее получаются неравенства (1.1) и (1.2). Мы отмечали, что $T\colon g \to f * g$ есть оператор типа $(p_0, q_0) = (1, p)$ и $(p_1, q_1) = (p', \infty)$

[1] Здесь M — множество, $\mathcal{M}$ есть σ-алгебра измеримых подмножеств множества M и μ — мера, определенная на $\mathcal{M}$. Мы рассматриваем только σ-конечные пространства с мерой, так что справедливы все стандартные результаты теории меры, такие, как теорема Радона — Никодима и теорема Ф. Рисса о представлении линейного функционала.

[2] В случае когда p_0, p_1, q_0 или q_1 равно ∞, как обычно, полагаем $1/\infty = 0$.

(его область определения D содержит все пространства $L^r(E_n)$, $1 \leqslant r \leqslant p'$), причем его $(1, p)$-норма и (p', ∞)-норма не превосходят $\|f\|_p$. Таким образом, T — оператор типа (p_t, q_t), $0 \leqslant t \leqslant 1$, где

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} = 1 - t + \frac{t}{p'} = 1 - \frac{t}{p}$$

и

$$\frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} = \frac{1-t}{p} + \frac{t}{\infty} = \frac{1-t}{p}.$$

Положив $r = p_t$ и $q = q_t$, получим

$$\frac{1}{q} = \frac{1-t}{p} = \frac{1}{p} + \left(1 - \frac{t}{p}\right) - 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1.$$

При этом (r, q)-норма оператора T не превосходит $\|f\|_p^{1-t}\|f\|_p^t = \|f\|_p$. Но это и есть неравенство (1.1). Аналогично, поскольку преобразование Фурье есть оператор типа $(1, \infty)$ и $(2, 2)$ с нормами, не превосходящими 1, применение теоремы 1.3 с $t = 2/p'$ дает неравенство Хаусдорфа — Юнга (1.2).

Часто бывает полезной следующая геометрическая интерпретация теоремы М. Рисса о выпуклости. Пусть Q — квадрат на плоскости, вершины которого находятся в точках $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ и $(0, 1)$. Если T — оператор, удовлетворяющий предположениям теоремы 1.3, то можно поставить ему в соответствие точки $x_0 = (1/p_0, 1/q_0)$ и $x_1 = (1/p_1, 1/q_1)$, указав тем самым, что T — оператор типа (p_0, q_0) и (p_1, q_1). Когда t меняется от 0 до 1, точка $x_t = (1/p_t, 1/q_t)$ пробегает отрезок прямой, соединяющий точки x_0 и x_1; теорема 1.3 утверждает, что для каждой точки (α, β) этого отрезка T есть оператор типа $(1/\alpha, 1/\beta)$.

Теорему 1.3 называют *теоремой о выпуклости* потому, что функция $\varphi(t)$, равная логарифму (p_t, q_t)-нормы оператора T, является выпуклой. При этом множество всех точек $(1/p, 1/q)$, таких, что T — оператор типа (p, q), есть выпуклое множество. Мы покажем, что теорему 1.3 можно вывести из классического результата теории функций, связанного с логарифмически выпуклыми функциями. Этот результат — одна из теорем типа Фрагмена — Линделёфа (см. п. 5.2 гл. II) — известен как *теорема о трех прямых* и может быть сформулирован следующим образом:

Лемма 1.4. *Пусть F — ограниченная непрерывная комплекснозначная функция на замкнутой полосе $S = \{x + iy = z \in \mathbf{C};\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, аналитическая внутри S. Если $|F(iy)| \leqslant m_0$ и $|F(1 + iy)| \leqslant m_1$ для всех y, то $|F(x + iy)| \leqslant m_0^{1-x} m_1^x$ для всех $z = x + iy \in S$, т. е. если положить $k_x = \sup\{|F(x + iy)|;\ -\infty < y < \infty\}$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $\varphi(x) = \log k_x$ — выпуклая функция.*

Доказательство. Очевидно, можно считать, что m_0 и m_1 положительны. Тогда, рассмотрев, если необходимо, функцию $F(z)/m_0^{1-z}m_1^z$, можно свести задачу к случаю, когда $m_0 = 1 = m_1$. Таким образом, будем считать, что $|F(iy)| \leqslant 1$ и $|F(1+iy)| \leqslant \leqslant 1$ для всех y. Нам нужно показать, что $|F(z)| \leqslant 1$ для всех $z \in S$. Если предположить, что $\lim\limits_{|y| \to \infty} F(x+iy) = 0$ равномерно для $0 \leqslant x \leqslant 1$, то утверждение легко следует из принципа максимума. Действительно, в этом случае найдется такое $y_0 > 0$, что $|F(x+iy)| \leqslant 1$ для всех $|y| \geqslant y_0$, причем $|F(z)| \leqslant 1$ на границе прямоугольника с вершинами в точках iy_0, $1+iy_0$, $1-iy_0$, $-iy_0$. В общем случае можно применить этот результат к функции $F_n(z) = F(z)e^{(z^2-1)/n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как F ограничена, то $|F_n(z)| = |F(x+iy)|\, e^{-y^2/n}e^{(x^2-1)/n} \leqslant |F(x+iy)|\, e^{-y^2/n} \to 0$ при $y \to \to \infty$ равномерно для $0 \leqslant x \leqslant 1$, причем $|F_n(iy)| \leqslant 1$ и $|F_n(1+ +iy)| \leqslant 1$. Следовательно, $|F_n(z)| \leqslant 1$, и, устремляя n к ∞, получим доказываемое неравенство.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.3. Для этого положим $\alpha_j = 1/p_j$, $\beta_j = 1/q_j$, $j = 0, 1$, $\alpha = 1/p_t$ и $\beta = 1/q_t$. Следовательно, взяв $\alpha(z) = (1-z)\alpha_0 + z\alpha_1$ и $\beta(z) = (1-z)\beta_0 + z\beta_1$ для $z \in \mathbf{C}$, получим $\alpha(j) = \alpha_j$, $\beta(j) = \beta_j$, $j = 0, 1$, $\alpha(t) = \alpha$ и $\beta(t) = \beta$.

Сначала оценим $\| Tf \|_q$, где f — конечная линейная комбинация характеристических функций множеств конечной меры из M. Любая такая простая функция f по определению принадлежит области определения оператора T. Поскольку

$$\|Tf\|_q = \sup \left| \int\limits_N (Tf)\, g d\nu \right|,$$

где верхняя грань берется по всем простым функциям g, таким, что $\|g\|_{q'} = 1$, $(1/q) + (1/q') = 1$, каждый интеграл

$$I = \int\limits_N (Tf)\, g d\nu$$

по абсолютной величине не превосходит $k_0^{1-t}k_1^t \|f\|_p$. Если $\|f\|_p$ не равна 0, то, деля на $\|f\|_p$, сводим задачу к случаю $\|f\|_p = 1$.

Предположим теперь, что $f = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j\chi_{E_j}$ и $g = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\chi_{F_k}$ — простые функции, удовлетворяющие указанным выше условиям. Предположим также, что $p_t < \infty$ и $q_t > 1$, так что $\alpha > 0$ и $\beta < 1$. Пусть $a_j = |a_j|\, e^{i\theta_j}$ и $b_k = |b_k|\, e^{i\varphi_k}$; положим

$$f_z = \sum_{j=1}^{m} |a_j|^{\alpha(z)/\alpha} e^{i\theta_j}\chi_{E_j}$$

и

$$g_z = \sum_{k=1}^{n} |b_k|^{(1-\beta(z))/(1-\beta)} e^{i\varphi_k}\chi_{F_k}, \qquad z \in \mathbf{C}.$$

Полагая $F(z) = \int_N (Tf_z)\, g_z dv$, получим целую функцию, причем из определения $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ следует, что $F(t) = I$. Из линейности T вытекает, что

$$F(z) = \sum_{j,k}^{m,n} |a_j|^{\alpha(z)/\alpha} |b_k|^{(1-\beta(z))/(1-\beta)} \gamma_{jk},$$

где $\gamma_{jk} = e^{i(\theta_j+\varphi_k)} \int_N (T\chi_{E_j})\, \chi_{F_k} dv$. Поскольку каждое из слагаемых ограничено на полосе S, целая функция F также ограничена на этой полосе. Если мы сможем показать, что $|F(iy)| \leqslant k_0$ и $|F(1+iy)| \leqslant k_1$ для всех y, то искомое неравенство $|I| \leqslant k_0^{1-t} k_1^t$ будет непосредственно следовать из леммы 1.4.

Эти оценки можно получить, заметив сначала, что, поскольку $\alpha(iy) = \alpha_0 + iy(\alpha_1 - \alpha_0)$ и $1 - \beta(iy) = (1 - \beta_0) - iy(\beta_1 - \beta_0)$, мы имеем

$$|f_{iy}|^{p_0} = |e^{i \arg f}\, |f|^{iy(\alpha_1-\alpha_0)/\alpha}\, |f|^{(p/p_0)}|^{p_0} = |f|^p,$$

$$|g_{iy}|^{q'_0} = |e^{i \arg g}\, |g|^{-iy(\beta_1-\beta_0)/(1-\beta)}\, |g|^{(q'/q'_0)}|^{q'_0} = |g|^{q'}.$$

Применяя теперь неравенство Гёльдера и учитывая, что T — оператор типа (p_0, q_0) с нормой k_0, получим

$$|F_{iy}| \leqslant \|Tf_{iy}\|_{q_0} \|g_{iy}\|_{q'_0} \leqslant k_0 \|f_{iy}\|_{p_0} \|g_{iy}\|_{q'_0} =$$

$$= k_0 \left(\int_M |f|^p d\mu\right)^{1/p_0} \left(\int_N |g|^{q'} dv\right)^{1/q'_0} = k_0 \|f\|_p^{(p/p_0)} \|g\|_{q'}^{(q'/q'_0)} = k_0.$$

Аналогичные вычисления показывают, что $|F(1+iy)| \leqslant k_1$. Таким образом, приходим к выводу, что $\|Tf\|_q \leqslant k_0^{1-t} k_1^t \|f\|_p$ для всех простых функций f из $L^p(M)$.

Для того чтобы доказать это неравенство для произвольной функции $f \in D \cap L^p(M)$, где D — область определения оператора T, нужно показать, что существует последовательность простых функций $\{f_n\}$, такая, что $\|f_n - f\|_p \to 0$ и $(Tf_n)(x) \to (Tf)(x)$ почти всюду при $n \to \infty$. Если это так, то применение леммы Фату и только что полученного результата для простых функций даст нам неравенство $\|Tf\|_q \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|Tf_n\|_q \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \{k_0^{1-t} k_1^t \|f_n\|_p\} = k_0^{1-t} k_1^t \|f\|_p$

и теорема будет доказана. Для того чтобы найти такую последовательность, можно считать, что $f \geqslant 0$ (поскольку можно рассмотреть отдельно положительные и отрицательные части функций $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$). Изменив, если необходимо, обозначения, можно также считать, что $p \leqslant p_1$. Пусть f^0 и f^1 — срезы функции f, определяемые равенствами

$$f^0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } f(x) > 1, \\ 0 & \text{при } f(x) \leqslant 1 \end{cases}$$

и $f^1 = f - f^0$. Так как $(f^0)^{p_0} \leqslant f^p$, $(f^1)^{p_1} \leqslant f^p$ и D содержит все срезы функции f, то $f^0 \in D \cap L^{p_0}(M)$ и $f^1 \in D \cap L^{p_1}(M)$. Пусть $\{g_m\}$ — возрастающая последовательность неотрицательных простых функций, сходящаяся к f; тогда из теоремы Лебега о монотонной сходимости следует, что $\lim\limits_{m\to\infty} \| g_m - f \|_p = 0$. По той же самой причине $\| g_m^0 - f^0 \|_{p_0}$ и $\| g_m^1 - f^1 \|_{p_1}$ стремятся к 0, когда $m \to \infty$, где g_m^0 и g_m^1 — срезы функции g_m, полученные из g_m таким же образом, как f^0 и f^1 из f. Так как T — оператор типа (p_0, q_0) и (p_1, q_1), то $\| Tg_m^0 - Tf^0 \|_{q_0} \to 0$ и $\| Tg_m^1 - Tf^1 \|_{q_1} \to 0$, когда $m \to \infty$. Следовательно, существует подпоследовательность из $\{Tg_m^0\}$, сходящаяся почти всюду к Tf^0. Учитывая только те индексы, которые входят в эту подпоследовательность, найдем затем подпоследовательность $\{g_{m_n}^1\}$, такую, что $Tg_{m_n}^1$ сходится почти всюду к Tf^1. Положив теперь $f_n = Tg_{m_n}^0 + Tg_{m_n}^1$, получим последовательность $\{f_n\}$ с нужными свойствами: $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \|_p = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} (Tf_n)(x) = (Tf^0)(x) + (Tf^1)(x) = (Tf)(x)$ почти всюду.

Осталось еще снять ограничения $\alpha > 0$ и $\beta < 1$. Исключенные случаи, однако, проще, чем уже рассмотренные. Если $\alpha = 0$ и $\beta = 1$, то по крайней мере одна из пар (p_0, q_0) и (p_1, q_1) равна $(\infty, 1)$ и доказывать нечего. В случае $\alpha > 0$, $\beta = 1$ приведенное выше доказательство останется справедливым, если положить g_z равной g для всех $z \in \mathbf{C}$. Аналогично, если $\alpha = 0$, а $\beta < 1$, то нужно положить $f_z \equiv f$. Это завершает доказательство теоремы 1.3.

Теорема М. Рисса о выпуклости является мощным инструментом анализа, и из нее можно вывести, кроме неравенств (1.1) и (1.2), много других важных неравенств. В некоторых случаях, однако, встречаются семейства операторов $\{T_t\}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, непрерывно отображающие $L^{p_t}(M, d\mu_t)$ в $L^{q_t}(N, d\nu_t)$, где операторы и меры зависят от t «гладким» образом. В § 4 будет выведено обобщение теоремы 1.3, применимое к таким семействам операторов. В других случаях встречаются (необязательно линейные) операторы, определенные на пространствах L^{p_t}, $0 \leqslant t \leqslant 1$, не являющиеся операторами типа (p_0, q_0) и (p_1, q_1), но непрерывно отображающие L^{p_t} в

L^{q_t} при $0 < t < 1$. В следующем параграфе будет показано, что для того, чтобы гарантировать (сильный) тип (p_t, q_t) при $0 < t < 1$, обычно достаточно более слабых условий в «крайних точках» (p_i, q_i), $i = 0, 1$.

2. Интерполяционная теорема Марцинкевича

Во второй главе была введена максимальная функция Харди — Литтлвуда m_f для $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Было показано (см. следствие 3.11 гл. II), что при $1 < p \leqslant \infty$ оператор M, переводящий f в m_f, имеет тип (p, p). Доказательство этого результата опиралось на два результата для «крайних точек». Один из них есть легко доказываемое утверждение, что M—оператор типа (∞, ∞) с нормой 1, другой — теорема 3.10, описывающая поведение сужения оператора M на $L^1(E_n)$. Было показано, что если f принадлежит $L^1(E_n)$, то функция распределения [1] λ функции m_f удовлетворяет неравенству

$$\lambda(s) \leqslant \frac{c\|f\|_1}{s} \tag{2.1}$$

для всех $s > 0$, где постоянная c не зависит от f. Если бы существовала функция φ, интегрируемая на $(0, \infty)$ и такая, что $\lambda(s) \leqslant \varphi(s)\|f\|_1$, то из равенства $\|m_f\|_1 = \int_0^\infty \lambda(s)\,ds$ (см. (3.9) гл. II) следовало бы, что M — оператор типа (1, 1). Но неравенство (2.1) нельзя улучшить сразу для всех функций из $L^1(E_n)$ (в этом легко убедиться, вычислив m_f для f, равной характеристической функции интервала $(0,1) \subset E_1$). Обобщив рассуждения, использованные при доказательстве того, что M — типа (p, p), $1 < p \leqslant \infty$, можно доказать интерполяционную теорему Марцинкевича об операторах, отображающих пространства L^p в пространства L^q. Этот результат обобщает теорему М. Рисса о выпуклости в том смысле, как это было упомянуто в конце § 1 (а именно: более слабые условия в крайних точках все же гарантируют ограниченность для промежуточных значений, и операторы, несколько более общие, чем линейные, также могут быть включены). С другой стороны, она не применима ко всем парам (p, q), рассмотренным в теореме 1.3, и не дает никаких утверждений о выпуклости норм.

Для того чтобы сформулировать теорему Марцинкевича, необходимо ввести несколько новых понятий. Пусть T — оператор,

---

[1] Если $(M, \mathcal{M}, \mu)$ — пространство с мерой и g — измеримая функция на M, то ее *функция распределения* λ определяется для неотрицательных чисел s равенством $\lambda(s) = \mu\{x \in M; |g(x)| > s\}$. В § 3 гл. II это понятие было введено для случая, когда $M = E_n$ и μ — лебегова мера.

определенный на некотором линейном пространстве D функций, измеримых на $(M, \mathcal{M}, \mu)$, со значениями в другом пространстве функций, измеримых на $(N, \mathcal{N}, \nu)$. Будем говорить, что оператор T *субаддитивный,* если

$$(2.2) \qquad |[T(f_1+f_2)](x)| \leqslant |[Tf_1](x)| + |[Tf_2](x)|$$

для почти всех $x \in N$ и любых f_1 и f_2 из D. Когда D содержит все конечные линейные комбинации характеристических функций всех множеств конечной меры и все срезы своих элементов, будем говорить, что T — оператор *слабого типа* (p, q), $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $1 \leqslant q \leqslant \infty$, если существует постоянная k, не зависящая от $f \in L^p(M) \cap D$ и такая, что

$$(2.3) \qquad \lambda(s) \leqslant \left(\frac{k\|f\|_p}{s}\right)^q,$$

где λ — функция распределения для Tf. Когда $q = \infty$, неравенство (2.3) заменяется условием $\|Tf\|_q \leqslant k\|f\|_p$. Наименьшее k, для которого выполняются эти неравенства, называется *слабой* (p, q)*-нормой* оператора T.

Легко видеть, что оператор типа (p, q) является и оператором слабого типа (p, q). Когда $q = \infty$, это очевидно. Пусть $q < \infty$, $f \in L^p(M) \cap D$, $s > 0$ и $\lambda(s) = \nu\{x \in N;\ |(Tf)(x)| > s\} = \nu(E_s)$ — функция распределения для Tf; тогда

$$s^q\lambda(s) = s^q \int\limits_{E_s} d\nu \leqslant \int\limits_{E_s} |Tf|^q\,d\nu \leqslant \|Tf\|_q^q \leqslant (k\|f\|_p)^q,$$

и неравенство (2.3) получается делением на s^q.

Интерполяционную теорему Марцинкевича можно теперь сформулировать следующим образом:

Теорема 2.4. *Пусть* T — *субаддитивный оператор слабого типа* (p_j, q_j), *где* $1 \leqslant p_j \leqslant q_j \leqslant \infty$ *для* $j = 0, 1$ *и* $q_0 \neq q_1$; *тогда* T — *оператор типа* (p_t, q_t), *если только*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad и \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

при $0 < t < 1$.

В следующем параграфе будет введен класс функциональных пространств (включающий пространства L^p), образующий естественную основу для обобщения теоремы 2.4. Поскольку это обобщение будет доказано в § 3, мы не будем давать здесь доказательствс теоремы Марцинкевича. Вместо этого остальную часть данного параграфа посвятим одному важному приложению этой интерполяционной теоремы.

В третьей главе было введено преобразование Гильберта и отмечены некоторые его свойства (см. (6.14) гл. III). В частности, было указано, что это оператор типа (p, p), $1 < p < \infty$. Покажем, что этот результат следует из теоремы Марцинкевича, установив, что он имеет тип (2, 2) и слабый тип (1, 1). Выше этот оператор рассматривался очень кратко, так что необходимо полнее исследовать его свойства.

Пусть f принадлежит $L^p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$, и принимает только вещественные значения. Тогда, в силу теорем 2.1 и 3.2 гл. II, интеграл Пуассона функции f

$$u(x+iy) = u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}\, dt$$

является гармонической функцией в верхней полуплоскости E_2^+, такой, что $u(z) = u(x+iy)$ некасательно сходится к $f(x_0)$ для почти всех $x_0 \in (-\infty, \infty)$ и

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(x+iy)|^p\, dx \right)^{1/p} \leqslant \|f\|_p \tag{2.5}$$

для всех $y > 0$.

Нетрудно показать, что существует (единственная) гармоническая функция v, определенная на E_2^+ и такая, что $F = u + iv$ аналитична в этой области и $\lim\limits_{y \to \infty} v(x+iy) = 0$ для всех $x \in (-\infty, \infty)$. Эту функцию можно получить в виде свертки f с сопряженным ядром Пуассона

$$Q(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$-\infty < x < \infty$, $y > 0$ (см. (6.13) гл. III). А именно,

$$v(x, y) = v(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \frac{t}{t^2 + y^2}\, dt.$$

Так как функция

$$P(x, y) + iQ(x, y) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{y}{x^2 + y^2} + i \frac{x}{x^2 + y^2} \right\} = \frac{i}{\pi} \frac{1}{x + iy} = \frac{i}{\pi z}$$

аналитична в E_2^+, то тем же свойством обладает и $F(z) = u(z) + iv(z)$. Очевидно, что $v(x+iy)$ стремится к 0 при $y \to \infty$.

Лемма 2.6. *Функция $F(z)$, $z = x + iy \in E_2^+$, имеет некасательный предел $f(x_0) + i\tilde{f}(x_0)$ почти во всех точках $x_0 \in (-\infty, \infty)$.*

Доказательство. Рассматривая отдельно отрицательную и положительную части функции f, можно свести задачу к случаю $f \leqslant 0$. Итак, $u \leqslant 0$ и функция $G = \exp\{u + iv\} = e^F$ имеет модуль $e^u \leqslant 1$. Тогда, в силу теоремы 2.5 гл. II, $G(z)$ имеет некасательные пределы почти во всех точках границы. Эти пределы не могут быть равными 0 на множестве положительной меры, поскольку u — интеграл Пуассона. Значит, $v(z)$ имеет некасательные пределы по модулю 2π почти во всех граничных точках $x_0 \in (-\infty, \infty)$, т. е. предельные значения функции $v(z)$, когда z некасательно стремится к x_0, имеют вид $a + 2k\pi$, где k — целое число. Но из непрерывности $v(z)$, $z \in E_2^+$, немедленно следует, что если $v(z)$ имеет два различных граничных значения a и b, когда z некасательно стремится к x_0, то все точки, лежащие между a и b, также должны быть граничными значениями функции $v(z)$. Отсюда следует, что $v(z)$ может иметь некасательный предел по модулю 2π только в том случае, если она имеет некасательный предел. Это доказывает лемму.

Если, как и в лемме 2.6, положить $\tilde{f}(x_0)$ равным некасательному пределу функции $v(z)$, то получим почти всюду определенную функцию. Отображение $f \to \tilde{f}$ (которое, как было показано, определено для всех f из $L^p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$) называется *преобразованием Гильберта*. В третьей главе (см. (6.13) гл. III) говорилось, как можно показать, что преобразование Гильберта имеет тип (2, 2). Прежде всего было замечено, что для всех $y > 0$

$$\hat{Q}_y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t x} Q(x, y)\, dx = (-i \operatorname{sgn} t)\, e^{-2\pi |yt|}.$$

Таким образом, поскольку $v(\cdot, y)$ — свертка функций $Q(\cdot, y)$ и f,

$$\hat{v}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t x} v(x, y)\, dx = (-i \operatorname{sgn} t)\, e^{-2\pi |yt|} \hat{f}(t)$$

для почти всех t. В силу теоремы Планшереля и леммы Фату, отсюда следует, что

$$\|\tilde{f}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(x)|^2\, dx \leqslant \liminf_{y \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |v(x + iy)|^2\, dx =$$

$$= \liminf_{y \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{v}_y(t)|^2\, dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \|f\|_2^2.$$

Это и есть искомое неравенство, показывающее, что преобразование Гильберта имеет тип (2, 2):

$$\|\tilde{f}\|_2 \leqslant \|f\|_2 \tag{2.7}$$

для всех $f \in L^2(-\infty, \infty)$ [1].

Лемма 2.8. *Преобразование Гильберта имеет слабый тип* (1, 1).

Доказательство. Рассматривая отдельно отрицательную и положительную части функций $f \in L^1(-\infty, \infty)$, можно свести задачу к $f \geqslant 0$. Как и ранее, положим

$$F(z) = F(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\{P(x-t, y) + iQ(x-t, y)\}\,dt \tag{2.9}$$

для $z \in E_2^+$. Тогда при $s > 0$ функция $w(x, y) = \log|1 + sF(z)|$ гармонична в E_2^+ и ограничена в каждой полуплоскости вида $\{x+iy;\ y \geqslant y_0 > 0\}$. Отсюда, в силу леммы 2.7 гл. II,

$$w(x, y) = \log|1 + sF(x+iy)| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \log|1 + sF(\xi + i\eta)|\,d\xi,$$

когда $0 < \eta < y$. Устремляя $\eta \to 0$ и применяя лемму 2.6 вместе с леммой Фату, приходим к выводу, что последний интеграл больше или равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} \log\sqrt{(1 + sf(\xi))^2 + (s\tilde{f}(\xi))^2}\,d\xi.$$

Умножая на y и используя элементарные свойства логарифмической функции, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{(x-\xi)^2 + y^2} \log\sqrt{(1 + sf(\xi))^2 + (s\tilde{f}(\xi))^2}\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant y\log|1 + sF(x+iy)| \leqslant y\log(1 + s|F(x+iy)|) \leqslant ys|F(x+iy)|$$

С другой стороны, из представления (2.9) немедленно следует,

[1] Несложное изменение рассуждений показывает, что неравенство (2.7) можно обратить (так что преобразование Гильберта есть унитарный оператор на $L^2(-\infty, \infty)$). Этот вопрос будет рассмотрен снова в более общей постановке в гл. VI, когда будут введены преобразования Рисса.

что $yF(x+iy)$ стремится к $\|f\|_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,d\xi$, когда $y\to\infty$. Тогда, устремляя $y\to\infty$ в первом и последнем членах предыдущего неравенства, получим

$$(2.10)\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \log\sqrt{(1+sf(\xi))^2+(s\tilde{f}(\xi))^2}\,d\xi\leqslant s\|f\|_1.$$

Пусть $E_\tau=\{\xi\in(-\infty,\infty);\ |\tilde{f}(\xi)|>\tau\}$, $\tau>0$, и $m(E_\tau)$ — лебегова мера множества E_τ; тогда из (2.10) следует, что

$$(\log s\tau)\,m(E_\tau)\leqslant\int\limits_{E_\tau}\log|s\tilde{f}(\xi)|\,d\xi\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}\log\sqrt{(1+sf(\xi))^2+(s\tilde{f}(\xi))^2}\,d\xi\leqslant s\|f\|_1.$$

Положив теперь $s=e/\tau$, получим искомое неравенство слабого типа

$$m(E_\tau)\leqslant e\|f\|_1/\tau.$$

Итак, к преобразованию Гильберта можно применить теорему 2.4 с $p_0=q_0=1$ и $p_1=q_1=2$. Следовательно, существует постоянная A_p, не зависящая от $f\in L^p(-\infty,\infty)$, $1<p\leqslant 2$, и такая, что $\|\tilde{f}\|_p\leqslant A_p\|f\|_p$. Нетрудно увидеть, что это неравенство справедливо также и при $2\leqslant p<\infty$. Заметим сначала, что преобразование Гильберта, будучи пределом сверточных операторов, коммутирует со сдвигами. Следовательно, неравенство

$$(2.11)\qquad \|\tilde{f}\|_p\leqslant A_p\|f\|_p,$$

$f\in L^p(-\infty,\infty)$, $1<p<\infty$, является следствием только что установленного утверждения для $1<p\leqslant 2$ и теоремы 3.20 гл. I.

3. Пространства $L(p,q)$

Оператор слабого типа (r,p) — это оператор, отображающий пространство L^r в класс функций f, у которых функции распределения λ удовлетворяют оценке

$$(3.1)\qquad \sup_{s>0}\Phi(s)=\sup_{s>0}\{s[\lambda(s)]^{1/p}\}=A<\infty.$$

Это неравенство можно выразить иначе, сказав, что функция Φ имеет конечную L^∞-норму. Уже отмечалось, что

$$(3.2)\qquad \|f\|_p=\left(\int\limits_0^\infty s^p d\{-\lambda(s)\}\right)^{1/p}=\left(p\int\limits_0^\infty s^{p-1}\lambda(s)\,ds\right)^{1/p}$$

(см. (3.6) гл. II). Таким образом, $f \in L^p$ тогда и только тогда, когда $\Phi \in L^p(0, \infty)$ по отношению к мере $d\nu(s) = [1/\lambda(s)]\, d\{-\lambda(s)\}$. Действительно,

$$\|f\|_p = \left(\int_0^\infty [\Phi(s)]^p\, d\nu(s)\right)^{1/p}.$$

Будем теперь вместо L^∞-нормы или L^p-нормы функции Φ рассматривать L^q-норму, т. е. наложим условие

$$\left(\int_0^\infty [\Phi(s)]^q\, d\nu(s)\right)^{1/q} < \infty. \tag{3.3}$$

Возникает вопрос, интерполируются ли операторы, отображающие пространства L^r в классы функций, удовлетворяющих оценке (3.3)? В этом параграфе мы изучим функциональные пространства, определяемые условиями подобного типа, и покажем, что они образуют естественную основу для обобщения теоремы Марцинкевича.

Выражение слева в неравенстве (3.3) не определяет норму. Тем не менее существуют неравенства, эквивалентные (3.3), которые в большинстве случаев обеспечивают конечность нормы. Для того чтобы получить эти условия, введем *невозрастающую перестановку* f^* измеримой функции f, определенной на пространстве с мерой $(M, \mathcal{M}, \mu)$. Если λ— функция распределения функции f, то f^* определяется для $t > 0$ равенством

$$f^*(t) = \inf\{s;\ \lambda(s) \leqslant t\}.$$

Ясно, что функция λ невозрастающая [1]; если она непрерывна и строго убывает на положительной полуоси, то она имеет обратную функцию с такими же свойствами. Из приведенного выше определения сразу видно, что в этом случае f^* совпадает с этой обратной функцией. Следующая серия лемм посвящена установлению некоторых основных свойств функций λ и f^*. В дальнейшем мы будем предполагать, что $\lim\limits_{s\to\infty} \lambda(s) = 0$ и, следовательно, $f^*(t) < \infty$ для всех $t > 0$.

Лемма 3.4. (i) *Функции λ и f^* не возрастают и непрерывны справа;*

(ii) $\lambda(f^*(t)) \leqslant t$ *для всех* $t > 0$;

(iii) f *и* f^* *имеют одинаковые функции распределения.*

Доказательство. То, что λ — невозрастающая функция, уже было отмечено выше. Из определения следует, что f^* так-

---

[1] Поскольку $\{x \in M;\ |f(x)| > s_1\} \subset \{x \in M;\ |f(x)| > s_2\}$ при $s_1 > s_2$ и мера μ монотонна.

же не возрастает. Непрерывность справа для λ следует из непрерывности снизу меры μ и из соотношения

$$\lim_{s>s_0,\ s\to s_0} \{x \in M;\ |f(x)| > s\} = \{x \in M;\ |f(x)| > s_0\}.$$

Неравенство (ii) непосредственно следует из этой непрерывности справа.

Для того чтобы показать, что f^* непрерывна справа в точке t_0, заметим сначала, что это очевидно, если $f^*(t_0) = 0$ (потому что в этом случае $f^*(t) = 0$ при $t > t_0$, поскольку f^* неотрицательна и не возрастает). Если $f^*(t_0) > 0$, то выберем α, такое, что $f^*(t_0) > \alpha > 0$, и последовательность $\{\varepsilon_n\}$ положительных вещественных чисел, убывающую к 0. Из определения f^* следует, что $\lambda(f^*(t_0) - \alpha) > t_0$. Поэтому существует номер n_0, такой, что $\lambda(f^*(t_0) - \alpha) > t_0 + \varepsilon_n$ при $n \geqslant n_0$. Но отсюда следует, что $f^*(t_0) - \alpha < f^*(t_0 + \varepsilon_n)$ при $n \geqslant n_0$, иначе $f^*(t_0) - \alpha \geqslant f^*(t_0 + \varepsilon_n)$ для некоторого $n \geqslant n_0$, и, поскольку λ не возрастает, мы, в силу (ii), получили бы противоречие: $\lambda(f^*(t_0) - \alpha) \leqslant \lambda(f^*(t_0 + \varepsilon_n)) \leqslant t_0 + \varepsilon_n$. Таким образом, поскольку f^* не возрастает, $f^*(t_0) - \alpha < f^*(t_0 + \varepsilon_n) \leqslant f^*(t_0)$ для всех $n \geqslant n_0$. Это означает, что f^* непрерывна справа.

Для того чтобы доказать свойство (iii), заметим сначала, что из определения f^* следует, что $f^*(t) > s$ тогда и только тогда, когда $t < \lambda(s)$. Значит, $E_s^* = \{t > 0;\ f^*(t) > s\}$ совпадает с интервалом $(0, \lambda(s))$. Свойство (iii) теперь следует из того факта, что значение функции распределения функции f^* в точке s равно лебеговой мере множества E_s^*.

Лемма 3.5. *Пусть $\{f_m\}$ — последовательность измеримых функций, таких, что $|f_m(x)| \leqslant |f_{m+1}(x)|$, $m = 1, 2, \ldots$, для всех $x \in M$. Если f — измеримая функция, такая, что $|f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x)|$ для всех $x \in M$, то:*

(i) $\lambda_m(s)$ *для каждого $s > 0$, монотонно возрастая, стремится к $\lambda(s)$ при $m \to \infty$, где λ_m и λ — функции распределения функций f_m и f;*

(ii) $f_m^*(t)$ *для каждого $t > 0$, монотонно возрастая, стремится к $f^*(t)$.*

Доказательство. Ясно, что

$$E_s^{(m)} = \{x \in M;\ |f_m(x)| > s\} \subset E_s = \{x \in M;\ |f(x)| > s\}$$

и $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_s^{(m)} = E_s$. Тогда, в силу монотонности и непрерывности снизу меры μ, имеем $\lambda_m(s) = \mu(E_s^{(m)}) \leqslant \mu(E_s) = \lambda(s)$ и $\lim_{m\to\infty} \lambda_m(s) =$

$= \lambda(s)$. Это доказывает утверждение (i). Из определения f^* следует, что $f_m^*(t) \leqslant f_{m+1}^*(t) \leqslant f^*(t)$, $m = 1, 2, \ldots$. Пусть $l = \lim_{m\to\infty} f_m^*(t)$. Поскольку $f_m^*(t) \leqslant l$, имеем $\lambda_m(l) \leqslant \lambda_m(f_m^*(t)) \leqslant t$ (последнее неравенство является следствием части (ii) леммы 3.4). Таким образом, $\lambda(l) = \lim_{m\to\infty} \lambda_m(l) \leqslant t$, откуда $f^*(t) \leqslant l$. Но из неравенства $f_m^*(t) \leqslant f^*(t)$ вытекает, что $l \leqslant f^*(t)$. Следовательно, $l = f^*(t)$, и лемма доказана.

Эта лемма особенно полезна при доказательстве других свойств функций λ и f^*, поскольку она позволяет сводить эти доказательства к случаю, когда f — простая функция. Функцию распределения и невозрастающую перестановку такой функции особенно легко описать. Предположим, что $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$, где $E_j \in \mathcal{M}$, $\mu(E_j) > 0$ и $E_j \cap E_k = \varnothing$ при $j \neq k$. Изменив, если необходимо, нумерацию, можно считать, что $c_1 > c_2 > \cdots > c_n > c_{n+1} = 0$. Положим $d_j = \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, и пусть $d_0 = 0$. Тогда функция распределения λ функции f имеет вид

$$\lambda(s) = \begin{cases} d_j, & \text{если } c_{j+1} \leqslant s < c_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n; \\ 0, & \text{если } c_1 \leqslant s. \end{cases} \tag{3.6}$$

Отсюда следует, что

$$f^*(t) = \begin{cases} c_j, & \text{если } d_{j-1} \leqslant t < d_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n; \\ 0, & \text{если } d_n \leqslant t. \end{cases} \tag{3.7}$$

Из этих равенств видно, что при $p > 0$

$$\sup_{s>0} s\,[\lambda(s)]^{1/p} = \sup_{1\leqslant j\leqslant n} d_j^{1/p} c_j = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t).$$

Теперь можно показать, что верхняя грань в (3.1) допускает выражение в терминах невозрастающей перестановки рассматриваемой функции.

Лемма 3.8. *Если f — измеримая функция, λ — ее функция распределения и $p > 0$, то* (3.1) *выполняется тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) = A < \infty.$$

Доказательство. Только что было отмечено, что лемма 3.8 справедлива, когда f — простая функция. Если f — произвольная измеримая функция, то существует последовательность $\{f_m\}$ неотрицательных простых функций, сходящаяся, монотонно возрастая, к $|f|$ во всех точках множества M, так что лемма немедленно следует из леммы 3.5.

Ввиду неравенства (3.3) и сделанных перед ним замечаний естественно рассмотреть пространство $L(p, q)$ всех измеримых функций f, удовлетворяющих оценке

$$\|f\|_{pq}^{*} = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty,$$

когда $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, и

$$\|f\|_{pq}^{*} = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) < \infty,$$

когда $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $q = \infty$ [1]).

Когда f — простая функция, из равенств (3.7) немедленно следует, что

$$(3.9)\quad \|f\|_p = \left(\int_M |f|^p d\mu\right)^{1/p} = \left(\int_0^\infty [f^*(t)]^p\, dt\right)^{1/p} = \|f^*\|_p,\ 1 \leqslant p < \infty,$$

и

$$(3.9')\quad \|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty.$$

Из леммы 3.5 следует, что эти соотношения справедливы для всех функций $f \in L^p(M)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Поскольку $\|f\|_{pp}^{*} = \left(\int_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^p (dt/t)\right)^{1/p} = \left(\int_0^\infty [f^*(t)]^p\, dt\right)^{1/p} = \|f^*\|_p$, то $L(p, p) = L^p(M)$ и $\|\ \|_{pp}^{*}$ является нормой. В общем случае, однако, $\|\ \|_{pp}^{*}$ не является нормой, потому что может не выполняться неравенство Минковского. Несмотря на это, будет показано, что $\|\ \|_{pq}^{*}$ можно использовать для задания топологии на $L(p, q)$, которая в большинстве случаев будет топологией банахова пространства.

Есть несколько причин для введения постоянной q/p в определение $\|\ \|_{pq}^{*}$. Одним из следствий такого определения является то, что $\|\chi_E\|_{pq}^{*}$ не зависит от q, где E — измеримое подмножество конечной меры из M и χ_E — его характеристическая функция. Действительно,

$$(3.10)\quad \|\chi_E\|_{pq}^{*} = \{\mu(E)\}^{1/p}$$

для $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Это равенство отражает тот факт, что каждое пространство $L(p, q)$ при фиксированном p является пространством «типа L^p». Следующая теорема дает точную формулировку этого

---

[1]) Эти определения имеют смысл также и при $0 < p < 1$ и $0 < q < 1$. Однако, поскольку мы собираемся превратить $L(p, q)$ в банахово пространство, мы эти случаи не рассматриваем. Кроме того, в приведенных выше определениях принято обычное соглашение $1/\infty = 0$. Заметим, что пространство $L(\infty, q)$ определено только при $q = \infty$.

утверждения. Она также показывает, что в некотором смысле $L(p, 1)$ есть «наименьшее» нормированное линейное пространство, для которого выполняется равенство (3.10), в то время как $L(p, \infty)$ — «наибольшее» такое пространство.

Теорема 3.11. *Если $f \in L(p, q_1)$ и $q_1 \leqslant q_2$, то*

(i) $$\|f\|^*_{pq_2} \leqslant \|f\|^*_{pq_1};$$

следовательно,

(ii) $$L(p,q_1) \subset L(p,q_2)\ ^{1)}.$$

Пусть $\|\ \|$ — норма, сохраняющая упорядочение (т. е. $\|g\| \leqslant \|f\|$, если $|g(x)| \leqslant |f(x)|$ почти всюду) и определенная на простых функциях на M; тогда

(iii) *из неравенства $\|\chi_E\| \leqslant \{\mu(E)\}^{1/p}$ для всех $E \in \mathcal{M}$ следует, что $\|f\| \leqslant \|f\|^*_{p1}$ для всех простых функций f,*

(iv) *из неравенства $\{\mu(E)\}^{1/p} \leqslant \|\chi_E\|$ для всех $E \in \mathcal{M}$ следует, что $\|f\|^*_{p\infty} \leqslant \|f\|$ для всех простых функций f.*

Доказательство. Неравенство (i) особенно просто доказывается, когда $q_2 = \infty$. Поскольку функция f^* не возрастает,

$$t^{1/p}f^*(t) = f^*(t)\left\{(q_1/p)\int_0^t u^{(q_1/p)-1}du\right\}^{1/q_1} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{(q_1/p)\int_0^t [u^{1/p}f^*(u)]^{q_1}\frac{du}{u}\right\}^{1/p_1} \leqslant \|f\|^*_{pq_1}.$$

1) Для того чтобы получить это включение, достаточно показать, что существует постоянная B, не зависящая от $f \in L(p, q_1)$ и такая, что $\|f\|^*_{pq_2} \leqslant B\|f\|^*_{pq_1}$. Существуют простые доказательства этого неравенства. Например,

$$\left(\int_0^\infty [t^{1/p}f^*(t)]^{q_2}\frac{dt}{t}\right)^{q_1/q_2} \leqslant \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}[f^*(2^{k-1})]^{q_2}\int_{2^{k-1}}^{2^k} t^{(q_2/p)-1}dt\right)^{q_1/q_2} \leqslant$$

$$\leqslant B' \sum_{k=-\infty}^{\infty}[f^*(2^{k-1})]^{q_1}2^{kq_1/q_2} \leqslant$$

$$\leqslant B'' \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2^{k-2}}^{2^{k-1}}[t^{1/p}f^*(t)]^{q_1}\frac{dt}{t} \leqslant B'''\{\|f\|^*_{pq_1}\}^{q_1}.$$

Неравенство (i), однако, более тонкое и требует более сложного доказательства. Равенство (3.10) показывает, что (i) — наилучшее из возможных.

Взяв верхнюю грань от $t^{1/p}f^*(t)$ по всем $t > 0$, получим искомое неравенство.

Когда $q_2 < \infty$, из леммы 3.5 следует, что достаточно доказать утверждение для простой функции f. Предположим тогда, что f^* имеет вид (3.7); при этом

$$\|f\|_{pq}^* = \left\{\sum_{j=1}^{n} c_j^q \left(d_j^{(q/p)} - d_{j-1}^{(q/p)}\right)\right\}^{1/q}.$$

Положим $a_j = c_j^{q_2}$, $b_j = d_j^{q_2/p}$ и $\theta = q_1/q_2$; тогда неравенство (i) примет вид

$$\text{(a)}\qquad \sum_{j=1}^{n} a_j (b_j - b_{j-1}) \leqslant \left\{\sum_{j=1}^{n} a_j^\theta (b_j^\theta - b_{j-1}^\theta)\right\}^{1/\theta},$$

где $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$, $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n$ и $0 < \theta \leqslant 1$. Докажем (a) по индукции. Когда $n = 1$, это неравенство сводится к неравенству $a_1 b_1 \leqslant \{a_1^\theta b_1^\theta\}^{1/\theta}$, которое очевидно.

Предположим теперь, что (a) справедливо для $n = N$. Введем обозначения

$$\varphi(x) = \left\{\sum_{j=1}^{N} a_j^\theta (b_j^\theta - b_{j-1}^\theta) + x^\theta (b_{N+1}^\theta - b_N^\theta)\right\}^{1/\theta} = (A + x^\theta B)^{1/\theta}$$

и

$$l(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j (b_j - b_{j-1}) + x (b_{N+1} - b_N) = A_1 + xB_1$$

для $0 \leqslant x \leqslant a_N$. Покажем, что $\varphi(a_{N+1}) \geqslant l(a_{N+1})$, если $0 < a_{N+1} < a_N$. По предположению индукции, $\varphi(0) \geqslant l(0)$ и $\varphi(a_N) \geqslant l(a_N)$ (это последнее неравенство сводится к (a), если b_N заменить на b_{N+1}). С другой стороны, поскольку производная $\varphi'(x) = B(Ax^{-\theta} + B)^{(1/\theta)-1}$ убывает на положительной вещественной полуоси, функция φ вогнутая. Следовательно, из того, что она мажорирует линейную функцию l в концевых точках 0 и a_N, вытекает, что $\varphi(x) \geqslant l(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant a_N$. Это завершает доказательство части (i). Одновременно отсюда получается и часть (ii).

Поскольку норма $\|\ \|$ сохраняет упорядочение, достаточно доказать (iii) для неотрицательной простой функции $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$. Можно считать, что $c_1 > c_2 > \cdots > c_n > c_{n+1} = 0$ и множества $E_1, \ldots, E_n$ попарно не пересекаются. Для $k = 1, 2, \ldots, n$ положим $f_k = b_k \chi_{F_k}$, где $F_k = \bigcup_{j=1}^{k} E_j$ и $b_k = c_k - c_{k+1}$. Тогда, очевидно,

$$\text{(b)}\qquad f^*(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k^*(t) \quad \text{при} \quad t > 0$$

и

$$\|f\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|f_k\| = \sum_{k=1}^{n} b_k \|\chi_{F_k}\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k \{\mu(F_k)\}^{1/p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p} \int_0^\infty t^{1/p} f_k^*(t) \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{p} \int_0^\infty t^{1/p} \sum_{k=1}^{n} f_k^*(t) \frac{dt}{t} = \frac{1}{p} \int_0^\infty t^{1/p} f^*(t) \frac{dt}{t} = \|f\|_{p1}^*.$$

Это доказывает часть (iii).

Для того чтобы доказать (iv), заметим, что в обозначениях, введенных перед равенством (3.6), имеем

$$\|f\|_{p\infty}^* = \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} d_j^{1/p} c_j$$

(это следует из определения $\| \ \|_{p\infty}$ и равенств, приведенных сразу после (3.7)). Предположим, что верхняя грань справа достигается при $j = k$, так что

$$\|f\|_{p\infty}^* = d_k^{1/p} c_k.$$

Положим $g = c_k \chi_{F_k}$. Тогда $0 \leqslant g \leqslant f$; следовательно,

$$\|f\|_{p\infty}^* = d_k^{1/p} c_k = c_k \{\mu(F_k)\}^{1/p} \leqslant {}_k \|\chi_{F_k}\| = \|g\| \leqslant \|f\|,$$

и теорема доказана.

Полезно связать с каждым пространством $L(p, q)$ точку $(1/p, 1/q)$ квадрата $Q = \{(x_1, x_2) \in E_2;\ 0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1\}$. Из теоремы 3.11 (ii) следует, что если $x_1 = 1/p$ фиксировано, а $x_2 = 1/q$ изменяется от 1 до 0, то получаются точки, связанные с возрастающим семейством функциональных пространств. Когда точка попадает на диагональ $\{(x_1, x_2) \in Q;\ x_1 = x_2\}$ квадрата Q, соответствующее пространство совпадает с L^p (см. (3.9)). Имея в виду определение оператора слабого типа, данное в § 2, естественно назвать $L(p, \infty)$ — наибольшее из пространств этого семейства — *слабым пространством* L^p. Такая терминология оправдывается тем, что неравенство (2.3), использованное в определении оператора слабого типа (r, p), по лемме 3.8 эквивалентно неравенству

$$\|Tf\|_{p\infty}^* \leqslant k \|f\|_r.$$

Поскольку $\|f\|_r = \|f\|_{rr}^*$ и $r \geqslant 1$, из неравенства (i) теоремы 3.11 следует, что $\|f\|_r \leqslant \|f\|_{r1}^*$. Таким образом, оператор T слабого типа (r, p) удовлетворяет более слабому неравенству

$$\|Tf\|_{p\infty}^* \leqslant k \|f\|_{r1}^* \tag{3.12}$$

для всех f из области определения оператора T, лежащих в $L(r, 1)$. Интерполяционная теорема, которая будет доказана в этом параграфе, утверждает, в частности, что условия типа (3.12) в концевых точках, хотя и более слабые, чем условия слабого типа, все же достаточны для того, чтобы гарантировать выполнение теоремы Марцинкевича (2.4). С частью (iii) теоремы 3.11 тесно связан тот факт, что предположения теоремы Марцинкевича можно ослабить еще дальше. Действительно, имеет место следующий результат, показывающий, что выполнение утверждений теоремы 2.4 зависит только от выполнения неравенств слабого типа в концевых точках для характеристических функций множеств конечной меры:

Теорема 3.13. *Пусть T — линейный оператор, отображающий конечные линейные комбинации характеристических функций χ_E множеств $E \subset M$ конечной меры в векторное пространство B, снабженное нормой $\| \ \|$, сохраняющей упорядочение. Если*

$$\|T\chi_E\| \leqslant C \|\chi_E\|_{r1}^{*} = C\{\mu(E)\}^{1/r},$$

где C не зависит от E, то существует постоянная A, такая, что

$$\|Tf\| \leqslant A \|f\|_{r1}^{*}$$

для всех f из области определения оператора T.

Доказательство. Если $f \geqslant 0$ принадлежит области определения оператора T, то ее можно представить в виде суммы $f = \sum_{k=1}^{n} f_k$, где функции f_k определены в доказательстве теоремы 3.11, так что выполняется равенство (b). Тогда

$$\|Tf\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} Tf_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|Tf_k\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} Cb_k \|\chi_{E_k}\|_{r1}^{*}.$$

Но, как было показано при доказательстве теоремы 3.11 (iii), последняя сумма равна $C\|f\|_{r1}^{*}$. Если $f = f_1 + if_2$ — комплекснозначная функция, то, применяя только что установленный результат к положительным и отрицательным частям функций f_1 и f_2, получим утверждение теоремы с $A = 4C$ [1].

Обсуждаемая интерполяционная теорема является следствием классической оценки, известной как *неравенство Харди:*

---

[1] Часть (iii) теоремы 3.11 есть частный случай теоремы 3.13, получаемый, когда T — единичный оператор. Ясно, что доказательство теоремы 3.11 остается справедливым для *сублинейных* операторов T, т. е. операторов, которые субаддитивны и положительно однородны ($|Taf| = |a| \, |Tf|$ для всех чисел a).

Лемма 3.14. *Пусть* $q \geqslant 1$, $r > 0$ *и* g — *неотрицательная функция, определенная на* $(0, \infty)$; *тогда*

$$\text{(i)} \quad \left(\int_0^\infty \left[\int_0^t g(u\; du\right]^q t^{-r-1} dt\right)^{1/q} \leqslant \frac{q}{r}\left(\int_0^\infty [ug(u)]^q u^{-r-1} du\right)^{1/q};$$

$$\text{(ii)} \quad \left(\int_0^\infty \left[\int_t^\infty g(u)\, du\right]^q t^{r-1} dt\right)^{1/q} \leqslant \frac{q}{r}\left(\int_0^\infty [ug(u)]^q u^{r-1} du\right)^{1/q}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что из (i) следует (ii). Применим неравенство (i) к функции $g_1(u) = u^{-2} g(u^{-1})$; тогда

$$\int_0^\infty \left[\int_0^t g_1(u)\, du\right]^q t^{-r-1} dt = \int_0^\infty \left[\int_{1/t}^\infty g(v)\, dv\right]^q t^{-r-1} dt =$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_s^\infty g(v)\, dv\right]^q s^{r-1} ds$$

не превосходит умноженной на $(q/r)^q$ величины

$$\int_0^\infty [ug_1(u)]^q u^{-r-1} du = \int_0^\infty [vg(v)]^q v^{r-1} dv,$$

так что достаточно доказать неравенство (i).

Используя неравенство Иенсена с $\varphi(x) = |x|^q$ и $d\mu(u) = u^{(r/q)-1} du$ (см. пример (2) в § 4 гл. II), получим

$$\left[\int_0^t g(u)\, du\right]^q = \left[\int_0^t g(u)\, u^{1-(r/q)} u^{(r/q)-1} du\right]^q \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1} t^{r(1-1/q)} \int_0^t [g(u)]^q u^{q-r-1+r/q} du.$$

Отсюда

$$\int_0^\infty \left[\int_0^t g(u)\, du\right]^q t^{-r-1} dt \leqslant \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1} \int_0^\infty t^{-1-r/q} \left[\int_0^t [g(u)]^q u^{q-r-1+r/q} du\right] dt =$$

$$= \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1} \int_0^\infty [g(u)\, u]^q u^{-r-1+r/q} \left(\int_u^\infty t^{-1-r/q} dt\right) du =$$

$$= \left(\frac{q}{r}\right)^q \int_0^\infty [g(u)\, u]^q u^{-r-1} du,$$

и неравенство Харди доказано.

Теперь мы можем сформулировать и доказать основной результат этого параграфа. Будем говорить, что субаддитивный оператор T есть оператор *условного слабого типа* (r, p), если его область определения D содержит все срезы своих элементов, а также все конечные линейные комбинации характеристических функций множеств конечной меры и если он удовлетворяет неравенству (3.12) для всех $f \in D \cap L(r, 1)$. Ввиду теоремы 3.13 такой оператор можно рассматривать как оператор слабого типа (r, p), если его сузить на характеристические функции множеств конечной меры.

Теорема 3.15. *Пусть T — субаддитивный оператор условных слабых типов (r_j, p_j), $j = 1, 2$, с $r_0 < r_1$ и $p_0 \neq p_1$; тогда существует постоянная $B = B_\theta$, такая, что*

$$\|Tf\|^*_{pq} \leqslant B \|f\|^*_{rq}$$

для всех f из области определения оператора T, принадлежащих $L(r, q)$, где $1 \leqslant q \leqslant \infty$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Доказательство. Для $f \in L(r, q) \cap D$ положим

$$f^t(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } |f(x)| > f^*(t^\gamma), \\ 0 & \text{при } |f(x)| \leqslant f^*(t^\gamma), \end{cases}$$

и $f_t(x) = f(x) - f^t(x)$, где

$$\gamma = \frac{(1/p_0) - (1/p)}{(1/r_0) - (1/r)} = \frac{(1/p) - (1/p_1)}{(1/r) - (1/r_1)}.$$

Тогда справедливы два неравенства:

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} (f^t)^*(s) &\leqslant \begin{cases} f^*(s) & \text{при } 0 < s < t^\gamma, \\ 0 & \text{при } t^\gamma \leqslant s; \end{cases} \\ f_t^*(s) &\leqslant \begin{cases} f^*(t^\gamma) & \text{при } 0 < s < t^\gamma, \\ f^*(s) & \text{при } t^\gamma \leqslant s. \end{cases} \end{aligned}$$

Когда функция f простая, неравенства (a) легко выводятся из формул, аналогичных формулам (3.7). Отсюда немедленно вытекает общий случай. Поскольку оператор T субаддитивный, имеем $|[Tf](y)| = |[T(f^t + f_t)](y)| \leqslant |[Tf^t](y)| + |[Tf_t](y)|$ для почти всех $y \in N$. Отсюда при $s > 0$

$$\{y \in N;\ |[Tf](y)| > (Tf^t)^*(s) + (Tf_t)^*(s)\} \subset$$
$$\subset \{y \in N;\ |[Tf^t](y)| > (Tf^t)^*(s)\} \cup \{y \in N;\ |[Tf_t](y)| > (Tf_t)^*(s)\}.$$

Если λ, λ^t и λ_t — функции распределения функций Tf, Tf^t и Tf_t соответственно, то из этого включения и леммы 3.4 (ii)

непосредственно следует, что

$$\lambda((Tf^t)^*(s)+(Tf_t)^*(s))\leqslant\lambda^t((Tf^t)^*(s))+\lambda_t((Tf_t)^*(s))\leqslant s+s=2s.$$

Таким образом, в силу определения $(Tf)^*$, имеем

(b) $$(Tf^t)^*(s)+(Tf_t)^*(s)\geqslant(Tf)^*(2s) \text{ для всех } s>0.$$

Пусть $r_1<\infty$ и $q<\infty$. Тогда из (b) с $s=t$ при помощи замены переменных и неравенства Минковского получим

$$\|Tf\|^*_{pq}=(q/p)^{1/q}\left\{\int_0^\infty[t^{1/p}(Tf)^*(t)]^q\frac{dt}{t}\right\}^{1/q}=$$

$$=(q/p)^{1/q}2^{1/p}\left\{\int_0^\infty[t^{1/p}(Tf)^*(2t)]^q\frac{dt}{t}\right\}^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant(q/p)^{1/q}2^{1/p}\left\{\left(\int_0^\infty[t^{1/p}(Tf^t)^*(t)]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}+\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^\infty[t^{1/p}(Tf_t)^*(t)]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}\right\}.$$

Поскольку T — оператор условных слабых типов (r_0,p_0) и (r_1,p_1), то $t^{1/p_0}(Tf^t)^*(t)\leqslant k_0\|f^t\|^*_{r_01}$ и $t^{1/p_1}(Tf_t)^*(t)\leqslant k_1\|f_t\|^*_{r_11}$ для всех $t>0$. Поэтому сумма в фигурных скобках не превосходит

$$k_0\left(\int_0^\infty[t^{(1/p)-(1/p_0)}\|f^t\|^*_{r_01}]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}+k_1\left(\int_0^\infty[t^{(1/p)-(1/p_1)}\|f_t\|^*_{r_11}]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}.$$

Но из первого неравенства (a) с помощью замены переменных и леммы 3.14 (i) получаем, что

$$\left(\int_0^\infty[t^{(1/p)-(1/p_0)}\|f^t\|^*_{r_01}]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_0^\infty\left[t^{(1/p)-(1/p_0)}\left(\frac{1}{r_0}\int_0^{t^\gamma}f^*(s)\,s^{(1/r_0)-1}ds\right)\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}=$$

$$=|\gamma|^{-(1/q)}(1/r_0)\left(\int_0^\infty\left[u^{(1/r)-(1/r_0)}\int_0^u f^*(s)\,s^{(1/r_0)-1}ds\right]^q\frac{du}{u}\right)^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\gamma|^{-(1/q)}}{1-(r_0/r)} \left(\int_0^\infty [u^{1/r_0} f^*(u)]^q \, u^{(q/r)-(q/r_0)} \frac{du}{u} \right)^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{1-(r_0/r)} \left(\frac{r}{|\gamma| q} \right)^{1/q} \| f \|^*_{rq}.$$

Аналогичные рассуждения, использующие второе из неравенств (a) и лемму 3.14, показывают, что

$$\left(\int_0^\infty [t^{(1/p)-(1/p_1)} \| f_t \|^*_{r_1 1}]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^\infty \left[t^{(1/p)-(1/p_1)} \left(\frac{1}{r_1} \int_0^{t^\gamma} f^*(t^\gamma) \, s^{(1/r_1)-1} ds + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1}{r_1} \int_{t^\gamma}^\infty f^*(s) \, s^{(1/r_1)-1} ds \right) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^\infty [t^{(1/p)-(1/p_1)} f^*(t^\gamma) \, t^{\gamma/r_1}]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} +$$

$$+ \frac{1}{r_1} \left(\int_0^\infty \left[t^{(1/p)-(1/p_1)} \int_{t^\gamma}^\infty f^*(s) \, s^{(1/r_1)-1} ds \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} =$$

$$= |\gamma|^{-(1/q)} \left\{ \left(\int_0^\infty [u^{1/r} f^*(u)]^q \frac{du}{u} \right)^{1/q} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r_1} \left(\int_0^\infty \left[u^{(1/r)-(1/r_1)} \int_u^\infty f^*(s) \, s^{(1/r_1)-1} ds \right]^q \frac{du}{u} \right)^{1/q} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{r}{|\gamma| q} \right)^{1/q} \| f \|^*_{rq} + \frac{|\gamma|^{-(1/q)}}{(r_1/r)-1} \left(\int_0^\infty [f^*(u) \, u^{1/r_1}]^q \, u^{(q/r)-(q/r_1)} \frac{du}{u} \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\frac{r}{|\gamma| q} \right)^{1/q} \left(\frac{r_1}{r_1 - r} \right) \| f \|^*_{rq}.$$

Таким образом, мы показали, что

$$\| Tf \|^*_{pq} \leqslant B \| f \|^*_{rq},$$

где

$$B = \left(\frac{r}{|\gamma| p}\right)^{1/q} 2^{1/p} \left(\frac{rk_0}{r - r_0} + \frac{r_1 k_1}{r_1 - r}\right).$$

Когда $r_1 < \infty$ и $q = \infty$, величина $t^{1/p}(Tf)^*(t)$, $t > 0$, оценивается с помощью неравенств (a) и (b) так же, как в проведенном выше доказательстве. При этом получаются постоянные c_1, c_2 и c_3 (зависящие только от индексов p, q, r, r_0 и r_1), такие, что

$$t^{1/p}(Tf^*)(t) \leqslant c_1 t^{(1/p)-(1/p_0)} \int_0^{t^\gamma} f^*(s) s^{(1/r_0)-1} ds +$$

$$+ c_2 t^{(1/p)-(1/p_1)} \int_0^{t^\gamma} f^*(s) s^{(1/r_1)-1} ds +$$

$$+ c_3 t^{(1/p)-(1/p_1)} \int_{t^\gamma}^{\infty} f^*(s) s^{(1/r_1)-1} ds.$$

Используя теперь неравенство $f^*(s) s^{1/r} \leqslant \|f\|^*_{r\infty}$, получим

$$t^{1/p}(Tf^*)(t) \leqslant \left\{\frac{c_1}{(1/r_0) - (1/r)} + \frac{c_2}{r_1} + \frac{c_3}{(1/r) - (1/r_1)}\right\} \|f\|^*_{r\infty} = B \|f\|^*_{r\infty},$$

и, следовательно, $\|Tf\|^*_{p\infty} \leqslant B \|f\|^*_{r\infty}$.

Оставшийся случай $r_1 = \infty$ и $q = \infty$ рассматривается таким же образом с использованием оценки $\|f_t\|^*_{\infty\infty} \leqslant f^*(t^\gamma)$.

Теорема 3.15, очевидно, содержит интерполяционную теорему Марцинкевича как частный случай; более того, она дает более тонкий результат, поскольку использует пространства $L(p, q)$. Например, применяя ее к преобразованию Фурье, получим следующее усиление неравенства Хаусдорфа — Юнга (см. (1.2)):

Следствие 3.16. *Пусть* $f \in L^p(E_n)$, $1 < p \leqslant 2$; *тогда* $\hat{f} \in L(p', p)$ *и существует постоянная* $B = B_p$, *такая, что*

$$\|\hat{f}\|^*_{p'p} \leqslant B \|f\|_p,$$

где $(1/p) + (1/p') = 1$.

Оставшаяся часть этого параграфа посвящена доказательству того, что большинство пространств $L(p, q)$ имеет норму, тесно связанную с $\|\ \|^*_{pq}$, причем с этой нормой $L(p, q)$ является банаховым пространством. Следующие леммы необходимы для доказательства этих утверждений.

Для удобства обозначений мы ограничимся рассмотрением *пространств с безатомной мерой*. Это означает, что $\mathcal{M}$ не содержит ато-

мов (множеств положительной меры, все измеримые подмножества которых имеют нулевую меру). Мы будем применять результаты, полученные в этом параграфе, только к пространствам с безатомной мерой $(E_n, \mathscr{B}, m)$, где $\mathscr{B}$ состоит из борелевских подмножеств пространства E_n, а m — мера Бореля — Лебега. Это ограничение используется только один раз при доказательстве части (iii) следующей леммы:

Лемма 3.17. *Пусть* $E \in \mathscr{M}$ *и* $F_s = \{x \in M;\ |f(x)| > s \geqslant 0\}$ (*так что* $\lambda(s) = \mu(F_s)$); *тогда*

(i) $\displaystyle\int_E |f|\,d\mu \leqslant \int_0^{\mu(E)} f^*(t)\,dt;$

(ii) $\displaystyle\int_{F_s} |f|\,d\mu = \int_0^{\lambda(s)} f^*(t)\,dt;$

(iii) *если* $\mu(M) \geqslant t > 0$, *то существует множество* $E_t \in \mathscr{M}$, *такое, что* $\mu(E_t) = t$ *и*

$$\int_{E_t} |f|\,d\mu = \int_0^t f^*(u)\,du.$$

Доказательство. Ясно, что если $|f_1| \leqslant |f|$, то $f_1^* \leqslant f^*$. Поэтому, если χ_E — характеристическая функция множества E и $f_1 = f\chi_E$, то

$$\text{(a)} \qquad \int_0^{\mu(E)} f_1^*(t)\,dt \leqslant \int_0^{\mu(E)} f^*(t)\,dt.$$

С другой стороны, функция распределения для f_1 не превосходит $\mu(E)$ и, следовательно, $f_1^*(t) = 0$ при $t > \mu(E)$. Из (3.9) при $p = 1$ имеем

$$\text{(b)} \qquad \int_E |f|\,d\mu = \int_M |f_1|\,d\mu = \int_0^\infty f_1^*(t)\,dt = \int_0^{\mu(E)} f_1^*(t)\,dt.$$

Из неравенства (a) и равенств (b) следует (i).

Для того чтобы доказать равенство (ii), заметим сначала, что если положить

$$g(t) = \begin{cases} f^*(t) & \text{при } 0 < t < \lambda(s), \\ 0 & \text{при } \lambda(s) \leqslant t, \end{cases}$$

то g и $h = f\chi_{F_s}$ будут иметь одинаковые функции распределения (когда f — простая функция, это непосредственно следует из леммы 3.4 (iii) и равенств (3.6) и (3.7); общий случай следует отсюда и из

леммы 3.5). Таким образом,

$$\int_{F_s} |f|\,d\mu = \int_M |h|\,d\mu = \int_0^\infty g(u)\,du = \int_0^{\lambda(s)} f^* u\,du.$$

Наконец, пусть $0 < t \leqslant \mu(M)$; положим $G = \{x \in M;\ |f(x)| > f^*(t)\}$ и $H = \{x \in M;\ |f(x)| \geqslant f^*(t)\}$. Докажем, что

$$\mu(G) \leqslant t \leqslant \mu(H).$$

Первое неравенство является следствием части (ii) леммы 3.4 и равенства $\mu(G) = \lambda(f^*(t))$. Второе неравенство особенно просто доказывается с помощью равенств (3.6) и (3.7), когда f — простая функция; общий случай следует тогда из леммы 3.5. Поскольку мы предположили, что рассматривается пространство с безатомной мерой $(M, \mathcal{M}, \mu)$, существует множество E_t из $\mathcal{M}$, такое, что $G \subset E_t \subset H$ и $\mu(E_t) = t$. Пусть $h = f\chi_{E_t}$. Тогда $h^* = f^*$ на интервале $(0, t)$, причем $h(u) = 0$ при $u \geqslant t$. Следовательно,

$$\int_{E_t} |f|\,d\mu = \int_M |h|\,d\mu = \int_0^\infty h^*(u)\,du = \int_0^t f^*(u)\,du.$$

Непосредственным следствием утверждений (i) и (iii) этой леммы является равенство

$$\sup_{E \in \mathcal{M}, \mu(E) \leqslant t} \int_E |f|\,d\mu = \int_0^t f^*(u)\,du. \tag{3.18}$$

Если f не равна нулю почти всюду и $t > 0$, то выражение слева в (3.18) положительно. Отсюда следует, что отображение $f \to t^{-1}\int_0^t f^*(u)\,du$ есть норма, определенная на каждом из пространств $L^p(M)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (ее конечность следует из неравенства Гёльдера

$$\int_E |f|\,d\mu = \int_M \chi_E |f|\,d\mu \leqslant \|f\|_p \|\chi_E\|_{p'} \leqslant t^{1/p'} \|f\|_p,$$

где $(1/p) + (1/p') = 1$). Эта норма тесно связана с максимальной функцией Харди — Литтлвуда, введенной в § 3 гл. II. Для того чтобы выяснить эту связь, сделаем несколько простых замечаний о максимальной функции.

Максимальная функция, введенная во второй главе, была определена как верхняя грань по всем интегральным средним функции $|f|$, взятым по шарам с центрами в точке x. В одномерном случае нетрудно показать, что ее основные свойства, установленные в § 3 гл. II, относятся также к более общей «несимметричной»

максимальной функции, значение которой в точке x равно

$$\sup \frac{1}{h+k} \int_{x-h}^{x+k} |f(u)|\, du, \tag{3.19}$$

где верхняя грань берется по всем неотрицательным h и k, таким, что $h+k>0$. Из неравенств

$$\frac{1}{h+k} \int_{x-h}^{x+k} |f(u)|\, du \leqslant \frac{1}{h+k} \int_{x-(h+k)}^{x+h+k} |f(u)|\, du \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{|x-u| \leqslant r} |f(u)|\, du$$

следует, что эта несимметричная максимальная функция не превосходит удвоенной максимальной функции, введенной ранее. Для того чтобы избежать новых обозначений, будем обозначать через $m = m_f$ функцию, определяемую выражением (3.19).

Пусть g — неотрицательная функция, определенная на вещественной оси и такая, что $g(u) = 0$ при $u < 0$ и g не возрастает на $[0, \infty)$. Если $t > 0$, то из $g(u) = 0$ при $u < 0$ следует, что $m(t) = m_g(t)$ есть верхняя грань всех интегральных средних

$$\frac{1}{h+k} \int_{t-h}^{t+k} g(u)\, du,$$

таких, что $t - h \geqslant 0$. Поскольку g не возрастает, простые рассуждения показывают, что каждое такое среднее не превосходит

$$\frac{1}{t} \int_0^t g(u)\, du.$$

Применяя эти рассуждения к функции g, равной $f^*(u)$ при $u \geqslant 0$, получим, что

$$m_g(t) = m_{f^*}(t) = m(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(u)\, du$$

для всех $t > 0$.

Поскольку функция f^* не возрастает, ясно, что $m(t) \geqslant f^*(t)$ для всех $t > 0$. Таким образом, положив

$$\|f\|_{pq} = \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty [t^{1/p} m(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

когда $1 \leqslant p < \infty$ и $1 \leqslant q < \infty$, и

$$\|f\|_{pq} = \sup_{t>0} t^{1/p} m(t),$$

когда $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $q=\infty$, получим

$$\|f\|^*_{pq} \leqslant \|f\|_{pq}. \tag{3.20}$$

Одно из преимуществ использования $\| \ \|_{pq}$ вместо $\| \ \|^*_{pq}$ состоит в том, что первая является нормой. Это следует из того, что, как было отмечено сразу после равенства (3.18), отображение $t \to \to m(t) = m_{f^*}(t)$ определяет норму при каждом $t > 0$. Из (3.9) с $p=1$ видно, что $\|f\|_{1\infty} = \|f\|_1$; с другой стороны, простые вычисления показывают, что функция f, для которой $\|f\|_{1q} < \infty$ при $1 \leqslant q < \infty$, должна быть равной 0 почти всюду. Однако, когда $1 < p \leqslant \infty$, $\| \ \|_{pq}$ «эквивалентна» $\| \ \|^*_{pq}$. Точнее, справедлив следующий результат[1]:

Теорема 3.21. *Пусть $f \in L(p,q)$, $1 < p \leqslant \infty$; тогда*

$$\|f\|^*_{pq} \leqslant \|f\|_{pq} \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|^*_{pq}.$$

Доказательство. Первое неравенство — это просто (3.20) и уже доказано. Когда $1 < p < \infty$ и $1 \leqslant q < \infty$, второе неравенство следует из леммы 3.14 (i):

$$\|f\|_{pq} = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty \left[\int_0^t f^*(u)\,du\right]^q t^{-q(1-1/p)-1}dt\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p}{p-1}\,\frac{q}{p}\left(\int_0^\infty [uf^*(u)]^q u^{-q(1-1/p)-1}du\right)^{1/q} = \frac{p}{p-1}\|f\|^*_{pq}.$$

В оставшихся случаях $1 < p \leqslant \infty$ и $q = \infty$ имеем

$$t^{1/p}m(t) = t^{(1/p)-1}\int_0^t f^*(u)\,du = t^{(1/p)-1}\int_0^t u^{-1/p}u^{1/p}f^*(u)\,du \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|^*_{p\infty} t^{(1/p)-1}\int_0^t u^{-1/p}du = \frac{p}{p-1}\|f\|^*_{p\infty}.$$

Теорема 3.22. *Пространство $L(p,q)$, $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \leqslant \infty$, с нормой $\| \ \|_{pq}$ есть банахово пространство.*

Доказательство. Нужно показать, что пространство $L(p,q)$ полное. Когда $p=\infty$, $L(p,q)$ определено только для $q=$

---

[1] Важно использовать как $\| \ \|^*_{pq}$, так и $\| \ \|_{pq}$, поскольку каждая имеет свои преимущества. Преимущество $\| \ \|_{pq}$, заключающееся в том, что она является нормой, часто компенсируется тем, что с первой легче обращаться; кроме того, как было только что отмечено, $\| \ \|_{1q}$ нельзя использовать для удовлетворительного обобщения пространства L^1.

$=\infty$; поскольку $L(\infty, \infty) = L^\infty$, теорема в этом случае следует из полноты пространства L^∞. Предположим теперь, что $1 < p < \infty$ и что $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в $L(p, q)$. В силу теоремы 3.21, теоремы 3.11 (i) и леммы 3.8, имеем

$$\sup_{s>0} s^p \mu(\{x \in M;\ |f_n(x) - f_m(x)| > s\}) \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

В частности, последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна по мере. Следовательно, существуют подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ и функция f, такие, что $f_{n_k}(x) \to f(x)$ почти всюду. Для данного $\delta > 0$ найдется $j_0 = j_0(\delta)$, такое, что $\|f_n - f_j\|_{pq} < \delta$ для $j, n \geqslant j_0$. Пусть $g_k = f_{n_k} - f_j$ и $g = f - f_j$; тогда из леммы Фату следует, что

$$\int_E |g|\, d\mu \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_E |g_k|\, d\mu$$

для любого измеримого множества E. Используя равенство (3.18) и еще раз лемму Фату, получим

$$\|f - f_j\|_{pq} = \|g\|_{pq} \leqslant \delta$$

при $j \geqslant j_0$. Это доказывает теорему. Можно показать, что пространство $L(p, q)$ нельзя нормировать, когда $p = 1$ и $1 < q \leqslant \infty$ (см. п. 5.12 ниже).

4. Интерполяция аналитических семейств операторов

В этом параграфе мы обобщим теорему М. Рисса о выпуклости на случай, когда интерполируемые операторы достаточно гладким образом зависят от индексов p и q. Предположим, что каждому z из полосы $S = \{z \in \mathbf{C};\ 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1\}$ отвечает линейный оператор T_z, определенный на пространстве простых функций из $L^1(M)$ со значениями в пространстве измеримых на N функций, такой, что $(T_z f)\, g$ интегрируема на N, когда f — простая функция из $L^1(M)$ и g — простая функция из $L^1(N)$. Назовем семейство $\{T_z\}$ допустимым, если отображение

$$z \to \int_N (T_z f)\, g\, d\nu$$

аналитично внутри S, непрерывно на S и существует постоянная $a < \pi$, такая, что величина

$$e^{-a|y|} \log \left| \int_N (T_z f)\, g\, d\nu \right|,$$

$z = x + iy$, равномерно ограничена сверху в полосе S.

При этом имеет место следующее обобщение теоремы 1.3:

Теорема 4.1. *Пусть* $\{T_z\}$, $z \in S$,— *допустимое семейство линейных операторов, таких, что*

$$\|T_{iy}f\|_{q_0} \leqslant M_0(y)\|f\|_{p_0} \quad \text{и} \quad \|T_{1+iy}f\|_{q_1} \leqslant M_1(y)\|f\|_{p_1}$$

для всех простых функций f *из* $L^1(M, m, \mu)$, *где* $1 \leqslant p_j,\ q_j \leqslant \infty$, *а* $M_j(y)$, $j = 0, 1$, *не зависят от* f *и удовлетворяют оценке*

$$\sup_{-\infty<y<\infty} e^{-b|y|}\log M_j(y) < \infty$$

с некоторой постоянной $b < \pi$. *Тогда, если* $0 \leqslant t \leqslant 1$, *то существует постоянная* M_t, *такая, что*

$$\|T_t f\|_{q_t} \leqslant M_t \|f\|_{p_t}$$

для всех таких простых функций f, *при условии, что* $1/p_t = (1-t)/p_0 + t/p_1$ и $1/q_t = (1-t)/q_0 + t/q_1$.

Доказательство этой теоремы очень похоже на доказательство теоремы М. Рисса о выпуклости, если только установить следующее обобщение теоремы о трех прямых (леммы 1.4):

Лемма 4.2. *Пусть* F — *непрерывная функция на* S, *аналитическая внутри* S *и удовлетворяющая оценке*

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1,-\infty<y<\infty} e^{-a|y|}\log|F(x+iy)| < \infty \tag{4.3}$$

с некоторой постоянной $a < \pi$. *Тогда*

$$\log|F(x)| \leqslant \frac{1}{2}\sin \pi x \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{\log|F(iy)|}{\operatorname{ch}\pi y - \cos \pi x} + \frac{\log|F(1+iy)|}{\operatorname{ch}\pi y + \cos\pi x}\right\} dy \tag{4.4}$$

для всех $0 < x < 1$.

Доказательство. Для $\zeta \in D = \{z \in \mathbf{C};\ |z| \leqslant 1\}$, $\zeta \neq 1, -1$, положим

$$h(\zeta) = (1/\pi i)\log i(1+\zeta)/(1-\zeta).$$

Очевидно, что функция h является суперпозицией конформного отображения $\zeta \to w = i(1+\zeta)/(1-\zeta)$ замкнутого единичного круга D без точек 1 и -1 на верхнюю полуплоскость $\{w \in \mathbf{C};\ w \neq 0, \operatorname{Im} w \geqslant 0\}$ и конформного отображения $w \to z = (\log w)/\pi i$ этой полуплоскости на S. Таким образом, h конформно отображает $D \setminus \{1, -1\}$ на S. При этом для $z \in S$

$$\zeta = h^{-1}(z) = \frac{e^{\pi i z} - i}{e^{\pi i z} + i}.$$

Положив $G(\zeta) = F(h(\zeta))$ для $\zeta \in D \setminus \{1, -1\}$, получим функцию, аналитическую на открытом единичном круге и непрерывную на замкнутом единичном круге, за исключением точек 1 и -1.

Если $0 \leqslant \rho < R < 1$, то применение формулы Пуассона — Иенсена дает для $\zeta = \rho e^{-i\theta}$

$$(4.5)\quad \log|G(\zeta)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}\log|G(Re^{i\varphi})|\,d\varphi.$$

Условие (4.3) показывает, что для G и $\eta = h^{-1}(x+iy)$

$$\log|G(\eta)| \leqslant A\{|1+\eta|^{-(a/\pi)} + |1-\eta|^{-(a/\pi)}\}$$

с некоторой постоянной A, не зависящей от $\eta \in D$. Поскольку $a/\pi < 1$, это неравенство с $\eta = Re^{i\varphi}$ позволяет применить к интегралу в неравенстве (4.5) теорему Лебега о мажорируемой сходимости. Тогда, устремляя R к 1, получим

$$(4.6)\quad \log|G(\zeta)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}\log|G(e^{i\varphi})|\,d\varphi$$

для $\zeta = \rho e^{i\theta}$, $\rho < 1$. Неравенство (4.4) получается теперь из (4.6) при помощи замены переменных. Заметим сначала, что условие $0 < x = h(\rho e^{i\theta}) < 1$ легко превратить в условие для ρ и θ. Поскольку в этом случае

$$\rho e^{i\theta} = h^{-1}(x) = \frac{e^{\pi i x}-i}{e^{\pi i x}+i} = -i\frac{\cos\pi x}{1+\sin\pi x} = \frac{\cos\pi x}{1+\sin\pi x}e^{-i(\pi/2)},$$

то $\rho = (\cos\pi x)/(1+\sin\pi x)$ и $\theta = -(\pi/2)$ при $0 < x \leqslant 1/2$, тогда как $\rho = -(\cos\pi x)/(1+\sin\pi x)$ и $\theta = \pi/2$ при $1/2 \leqslant x < 1$. В первом случае имеем

$$\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2} = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\varphi+\pi/2)+\rho^2} =$$
$$= \frac{1-\rho^2}{1+2\rho\sin\varphi+\rho^2} = \frac{\sin\pi x}{1+\cos\pi x\sin\varphi},$$

причем это равенство справедливо и при $1/2 \leqslant x < 1$. Из соотношения $e^{i\varphi} = h^{-1}(y) = (e^{-\pi y}-i)/(e^{-\pi y}+i)$ видно, что, когда φ меняется от $-\pi$ до 0, y меняется от $+\infty$ до $-\infty$. Далее, $\sin\varphi = -1/(\operatorname{ch}\pi y)$ и $d\varphi = -[\pi/(\operatorname{ch}\pi y)]\,dy$. Таким образом, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}\log|G(e^{i\varphi})|\,d\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\pi x}{\operatorname{ch}\pi y-\cos\pi x}\log|F(iy)|\,dy.$$

Аналогично, когда φ меняется от 0 до π, $h(e^{i\varphi})$ пробегает точки вида $1+iy$ с $-\infty<y<\infty$ и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}\log|G(e^{i\varphi})|\,d\varphi =$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi x}{\operatorname{ch}\pi y+\cos\pi x}\log|F(1+iy)|\,dy.$$

Это доказывает лемму.

Прежде чем показать, как можно использовать лемму 4.2 для доказательства теоремы 4.1, сделаем несколько замечаний. Сначала покажем, что лемма 4.2 действительно обобщает теорему о трех прямых. Имеем

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi x}{\operatorname{ch}\pi y+\cos\pi x}\,dy =$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}(\pi/2)x}{(1+\operatorname{tg}^2(\pi/2)x\,\operatorname{th}^2(\pi/2)y)\operatorname{ch}(\pi/2)y}\,dy =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{tg}(\pi/2)x}{1+s^2\operatorname{tg}^2(\pi/2)x}\,ds=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\operatorname{tg}(\pi/2)x}{1+s^2\operatorname{tg}^2(\pi/2)x}\,ds =$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\operatorname{tg}(\pi/2)x}\frac{du}{1+u^2}=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\pi/2)x)=x.$$

Поскольку $\sin\pi(1-x)=\sin\pi x$ и $\cos\pi(1-x)=-\cos\pi x$, имеем также

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi x}{\operatorname{ch}\pi y-\cos\pi x}\,dy=1-x.$$

Следовательно, если условие (4.3) заменить условием: $|F(iy)|\leqslant m_0$, $|F(1+iy)|\leqslant m_1$ и $|F|$ равномерно ограничена в S, то только что установленные равенства и (4.4) дадут: $|F(x+iy)|\leqslant m_0^{1-x}m_1^x$. Таким образом, теорема о трех прямых (лемма 1.4) есть частный случай леммы 4.2.

Из доказательства леммы 4.2 ясно, что интеграл в правой части неравенства (4.4) есть «конформный образ» соответствующего интеграла Пуассона для единичного круга. Действительно, небольшое изменение рассуждений, использованных для доказательства леммы 4.2, приводит к следующему решению задачи Дирихле для

полосы. Пусть f определена на вертикальных прямых $x = 0$ и $x = 1$ таким образом, что $e^{-a|y|} f(y)$ и $e^{-a|y|} f(1 + iy)$ ограничены для некоторой постоянной $a < \pi$; тогда

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \sin \pi x \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{f(iy)}{\operatorname{ch} \pi y - \cos \pi x} + \frac{f(1+iy)}{\operatorname{ch} \pi y + \cos \pi x} \right\} dy$$

— гармоническая внутри полосы S функция, имеющая (некасательные) граничные значения f. Условия $e^{-a|y|} f(y) = O(1)$ и $e^{-a|y|} f(1 + iy) = O(1)$ обеспечивают существование приведенного выше интеграла (это также объясняет роль условия (4.3)).

Перейдем теперь к доказательству теоремы 4.1. Пусть $f \in L^1(M)$ и $g \in L^1(N)$ — простые функции, такие, что

$$\|f\|_p = 1 = \|g\|_{q'},$$

где $p = p_t$, $q = q_t$ и $1/q + 1/q' = 1$. Пусть $f = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}$ и $g = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{F_k}$. Используя обозначения, введенные при доказательстве теоремы М. Рисса о выпуклости (теоремы 1.3), построим функцию

$$F(z) = \int_N (T_z f_z)\, g_z d\nu = \sum_{j,k=1}^{m,n} |a_j|^{\alpha(z)/\alpha} |b_k|^{(1-\beta(z))/(1-\beta)} \gamma_{jk}(z),$$

где $\gamma_{jk}(z) = e^{i(\theta_j + \varphi_k)} \int_N (T_z \chi_{E_j})\, \chi_{F_k} d\nu$. Из предположения, что $\{T_z\}$ — допустимое семейство, следует, что F удовлетворяет лемме 4.2. Кроме того, поскольку

$$|f_{iy}|^{p_0} = |f|^p = |f_{1+iy}|^{p_1} \text{ и } |g_{iy}|^{q_0'} = |g|^{q'} = |g_{1+iy}|^{q_1'},$$

то, применяя неравенство Гёльдера, получим, что $|F(iy)| \leqslant M_0(y)$ и $|F(1 + iy)| \leqslant M_1(y)$. Тогда, в силу леммы 4.2, имеем

$$\left| \int_N (T_t f)\, g d\nu \right| = |F(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \exp \left[\frac{1}{2} \sin \pi t \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\log M_0(y)}{\operatorname{ch} \pi y - \cos \pi t} + \frac{\log M_1(y)}{\operatorname{ch} \pi y + \cos \pi t} \right\} dy \right] = M_t.$$

Поскольку $\|T_t f\|_{p_t} = \sup_{\|g\|_{q_t'} = 1} \left| \int_N (T_t f)\, g d\nu \right|$, это доказывает теорему.

5. Дальнейшие результаты

5.1. Имеются различные обобщения теории интерполяции линейных операторов на общие банаховы пространства. Рамки этих обобщений можно описать следующим образом. Пусть V — топологическое векторное пространство, а A^0, A^1 — два банаховых пространства с нормами $\| \|_0$ и $\| \|_1$, непрерывно вложенные в V. Пространства $A^0 \cap A^1$ и $A^0 + A^1 = \{a = a_0 + a_1;\ a_0 \in A^0, a_1 \in A^1\}$ можно превратить в банаховы, введя в них нормы $\|a\|_{A^0 \cap A^1} = \max\{\|a\|_0, \|a\|_1\}$ и $\|a\|_{A^0+A^1} = \inf\{\|a_0\|_0 + \|a_1\|_1;\ a_0 \in A^0, a_1 \in A^1;\ a_0 + a_1 = a\}$ соответственно. *Промежуточное пространство* между A^0 и A^1 есть любое банахово пространство A, такое, что $A^0 \cap A^1 \subset A \subset A^0 + A^1$. Например, когда $A^0 = L^{p_0}$, $A^1 = L^{p_1}$, $1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$, $1/p_t = (1-t)/p_0 + t/p_1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, пространство L^{p_t} является промежуточным между L^{p_0} и L^{p_1}. Предположим, что промежуточное пространство A инвариантно при всех линейных преобразованиях T, переводящих $A^0 + A^1$ в себя и таких, что сужения T на A^j, $j = 0, 1$, непрерывно переводят A^j в себя. Если, кроме того, сужение каждого такого оператора T на A также ограничено, то будем говорить, что A — *пространство линейной интерполяции* между A^0 и A^1. Из теоремы М. Рисса о выпуклости следует, что L^{p_t} — пространство линейной интерполяции между L^{p_0} и L^{p_1}.

Основные вопросы абстрактной теории интерполяции линейных операторов можно сформулировать следующим образом:

(i) Даны два банаховых пространства A^0 и A^1; как можно охарактеризовать «все» пространства линейной интерполяции между A^0 и A^1?

(ii) Как построить пространства линейной интерполяции между данными банаховыми пространствами A^0 и A^1?

(iii) Пусть A — пространство линейной интерполяции между A^0 и A^1. Пусть B^0 и B^1 — два других банаховых пространства; существует ли пространство линейной интерполяции B (между B^0 и B^1), такое, что каждое линейное отображение $A^0 + A^1$ в $B^0 + B^1$, сужение которого на A^j отображает это пространство непрерывно в B^j, $j = 0, 1$, обладает тем свойством, что оно отображает непрерывно A в B?

(iv) Пусть A — некоторое, построенное каким-то специальным образом пространство линейной интерполяции между A^0 и A^1, и пусть таким же образом построено B для двух других банаховых пространств B^0 и B^1. Верно ли, что каждое линейное преобразование $A^0 + A^1$ в $B^0 + B^1$, непрерывно отображающее A^j в B^j, $j = 0, 1$, также отображает непрерывно A в B?

Ответ на первый вопрос был получен Гальярдо [1]. Более того, метод Гальярдо позволил ему получить утвердительный ответ

на третий вопрос. Эти результаты очень общие и не тáк тесно связаны с материалом этой главы, как две конструктивные теории интерполяции (т. е. ответы на вопросы (ii) и (iv)), построенные Лионсом [1], Кальдероном [2], Лионсом и Петре [1]. Несколько следующих пунктов будут посвящены описанию этих методов интерполяции.

5.2. Начнем с описания *комплексного метода интерполяции,* предложенного Кальдероном. Пусть B — банахово пространство и D — область в комплексной плоскости. Отображение $z \to b(z)$ области D в пространство B называется *аналитическим,* если $z \to l[b(z)]$ — аналитическая комплекснозначная функция на D для каждого непрерывного линейного функционала l на B. Введем вспомогательное пространство $\mathcal{F}(A^0, A^1)$, состоящее из всех функций f, определенных на полосе $S = \{z \in \mathbf{C};\ 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1\}$, со значениями в $A^0 + A^1$, таких, что:

(1) f аналитична во внутренности $S^\circ = \{z \in \mathbf{C};\ 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ полосы S;

(2) f непрерывна и норма $\|f\|_{A^0+A^1}$ ограничена на S;

(3) $f(it) \in A^0$ для $-\infty < t < \infty$, отображение $t \to f(it)$ непрерывно как функция из $(-\infty, \infty)$ в A^0 и $t \to \|f(it)\|_0$ ограничено;

(4) $f(1 + it) \in A^1$ для $-\infty < t < \infty$, отображение $t \to f(1 + it)$ непрерывно как функция из $(-\infty, \infty)$ в A^1 и $t \to \|f(1 + it)\|_1$ ограничено.

Пространство $\mathcal{F}(A^0, A^1)$ с нормой $\|f\|_{\mathcal{F}} = \|f\|_{\mathcal{F}(A^0,A^1)} = \max\{\sup_t \|f(it)\|_0,\ \sup_t \|f(1 + it)\|_1\}$ является банаховым. Пусть $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $N_t = \{f \in \mathcal{F};\ f(t) = 0\}$; определим тогда A_t как пространство $\mathcal{F}/N_t$. Ясно, что можно отождествить A_t с линейным пространством всех элементов $f(t) \in A^0 + A^1$, таких, что $f \in \mathcal{F}$. Введя на A_t обычную норму факторпространства $\|a\|_{A_t} = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}};\ f \in \mathcal{F},\ f(t) = a\}$, $a \in A_t$, превратим A_t в банахово пространство. Мы будем предполагать, что $\{0\} \neq A^0 \cap A^1$.

Ясно, что A_t — промежуточное пространство между A^0 и A^1. Более того, можно показать, что A_t — пространство линейной интерполяции между A^0 и A^1. Действительно, справедливо следующее решение задачи (iv), поставленной выше:

Пусть B^0 и B^1 — два банаховых пространства и T — линейное преобразование из $A^0 + A^1$ в $B^0 + B^1$, отображающее A^j в B^j, $j = 0, 1$, так, что $\|Ta\|_j \leqslant M_j \|a\|_j$ для всех $a \in A^j$. Тогда T отображает A_t в B_t и $\|Ta\|_{B_t} \leqslant M_0^{(1-t)} M_1^t \|a\|_{A_t}$ для всех $a \in A_t$.

Кальдерон дает другую (но похожую) конструкцию пространств линейной интерполяции между A^0 и A^1, ведущую к

другому решению задачи (iv). Однако, применяя те или иные из этих результатов, необходимо идентифицировать полученные пространства линейной интерполяции. Для того чтобы лучше продемонстрировать важность этой новой задачи, приведем несколько основных примеров интерполяции линейных операторов (большинство из них было известно до построения общей теории).

5.3. Пусть $(M, \mathcal{M}, \mu)$ — пространство с мерой и $A^j = L^{p_j}(M)$, $1 \leqslant p_j \leqslant \infty$, $j = 0, 1$. Можно вложить A^0 и A^1, скажем, в пространство V локально интегрируемых функций. Тогда существует норма, сохраняющая изоморфизм между A_t и $L^{p_t}(M)$, где $1/p_t = (1-t)/p_0 + t/p_1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, для всех $p_t < \infty$. В случае когда $p_t = \infty$, должно быть либо $p_t = p_0$, либо $p_t = p_1$; предположим, что $p_t = p_0$ и $p_1 < \infty$. При этом в общем случае не существует нормы, сохраняющей изоморфизм между A_0 и $A^0 = L^\infty(M)$. Можно показать, однако, что A_0 допускает отождествление с замыканием по L^∞-норме множества функций $f \in L^\infty(M)$, для которых $\mu(\{x \in M; |f(x)| > \alpha\}) < \infty$ для всех $\alpha > 0$. Если $B^0 = L^{q_0}(N)$ и $B^1 = L^{q_1}(N)$, где $(N, \mathcal{N}, \nu)$ — другое пространство с мерой, то теорема, сформулированная в п. 5.2, является другой формулировкой теоремы М. Рисса о выпуклости 1.3.

5.4. Пусть $(M, \mathcal{M}, \mu)$ — пространство с мерой и μ_j, $j = 0, 1$, — меры на $\mathcal{M}$, абсолютно непрерывные по отношению к μ. Если $A^j = L^{p_j}(M, \mu_j)$, то существует сохраняющий норму изоморфизм между A_t и $L^{p_t}(M, \mu_t)$, где $0 < 1/p_t = (1-t)/p_0 + t/p_1$ и $d\mu_t = \alpha_0^{1-t}\alpha_1^t d\mu$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ (α_j — производная Радона — Никодима меры μ_j, $j = 0, 1$, по отношению к μ). Когда $p_t = \infty$, необходимо соответствующим образом изменить построения п. 5.3 (см. Стейн и Г. Вейс [5]).

5.5. Для $p \geqslant 1$ обозначим через H^p пространство всех функций $F(z)$, аналитических в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и таких, что

$$\|F\|_p = \sup_{y>0}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^p\,dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Это есть пространство H^p, ассоциированное с трубчатой областью, основанием которой является положительная вещественная полуось (см. гл. III). Если $A^j = H^{p_j}$, $1 \leqslant p_j < \infty$, то A_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, *эквивалентно* H^{p_t} (т. е. существует обратимое линейное отображение A_t на H^{p_t}). (См. Салем и Зигмунд [1], Кальдерон и Зигмунд

[2] и Г. Вейс [1].) Задача идентификации пространств линейной интерполяции между двумя H^p-пространствами, ассоциированными с трубчатыми областями в пространствах высших размерностей, остается открытой. Таким же образом обстоит дело и с H^p-пространствами систем сопряженных гармонических функций, которые будут рассматриваться в следующей главе.

5.6. Пусть $0<\alpha<2$; рассмотрим пространство $\lambda_\alpha=\lambda_\alpha(E_n)$, состоящее из всех непрерывных ограниченных на E_n функций, таких, что $\sup\limits_x |f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|=o(|t|^\alpha)$ при $|t|\to 0$. Это есть банахово пространство с нормой

$$\|f\|^{(\alpha)}=\|f\|_\infty+\sup_{x,t}\{|t|^{-\alpha}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\}.$$

Для произвольного $\alpha>0$ определим λ_α как пространство всех C^k-функций, где k — наибольшее целое число, строго меньшее α, таких, что $D^\beta f\in\lambda_{\alpha-k}$ для $0\leqslant|\beta|=\beta_1+\cdots+\beta_n<\alpha$ (мы используем обозначения, введенные в (1.9) гл. I). При этом λ_α — банахово пространство с нормой $\|f\|^{(\alpha)}=\sum\limits_{|\beta|<\alpha}\|D^\beta f\|^{(\alpha-k)}$. Если $A^j=\lambda_{\alpha_j}$, $j=0, 1$, то A_t эквивалентно λ_α, где $\alpha=(1-t)\alpha_0+t\alpha_1$ (см. Тейблсон [1] и Кальдерон [2]).

5.7. Следующий пример обычно рассматривается в контексте пространств E_n, но его проще описать в рамках кратных рядов Фурье. Для произвольного $\alpha\geqslant 0$ определим пространство $L^p_\alpha(T_n)$ как множество всех $f\in L^p(T_n)$, таких, что $f(x)\sim\sim\sum\limits_m a_m e^{2\pi i m\cdot x}$; тогда $a_0+\sum\limits_{m\neq 0}|m|^\alpha a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ — ряд Фурье функции $f^{(\alpha)}\in L^p(T_n)$ (мы используем обозначения, которые будут введены в начале гл. VII). Это есть банахово пространство с нормой $\|f\|_p^{(\alpha)}=\|f^{(\alpha)}\|_p$. Пусть $A^j=L^{p_j}_{\alpha_j}$, $1<p_j<\infty$, $j=0, 1$; тогда A_t эквивалентно L^p_α, где $1/p=(1-t)/p_0+t/p_1$ и $\alpha=(1-t)\alpha_0+t\alpha_1$. Доказательство этого утверждения основывается на теореме 4.1 и на том, что отображение $f\to\sum\limits_m|m|^{-i\gamma}a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ есть ограниченный оператор на $L^p(T_n)$ для $1<p<\infty$, когда γ — вещественное число.

5.8. Классическую интерполяционную теорему М. Рисса, сформулированную в п. 5.3 или в § 1 этой главы, можно обобщить на случай функций, определенных на пространстве с мерой, со значениями в некотором банаховом пространстве. Точную формулировку этого результата см. в работе Кальдерона [2]. Частные случаи, когда зна-

чения рассматриваемых функций лежат в L^q- пространствах, были получены ранее Боасом и Бохнером [1] и Бенедеком и Панзоне [1]. Другое обобщение классической интерполяционной теоремы М. Рисса можно сформулировать для *банаховых решеток* (т. е. банаховых пространств, таких, что из $|f| \leqslant |g|$ следует $\|f\| \leqslant \|g\|$). (Точную формулировку см. у Кальдерона [2].) Это обобщение включает теорему М. Рисса, пример из п. 5.4 и интерполяционную теорему для пространств $L(p, q)$, которые были определены в §3.

5.9. Конструктивную теорию интерполяции, упомянутую в п. 5.1, которую ввели Гальярдо, Лионс и Петре, можно описать следующим образом. В обозначениях, введенных в п. 5.1, определим норму на $A^0 + A^1$ для каждого $t > 0$, положив $K_a(t) = \inf\{\|a_0\|_0 + t\|a_1\|_1;\ a_0 + a_1 = a,\ a_0 \in A^0,\ a_1 \in A^1\}$. Из этого определения сразу следует, что K_a — вогнутая неотрицательная функция на положительной вещественной полуоси. Предположим, что Φ — неотрицательная (возможно, принимающая значение $+\infty$) функция, определенная на множестве всех неотрицательных измеримых по Лебегу функций на $(0, \infty)$ и такая, что:

(i) $\Phi(h) = 0$ тогда и только тогда, когда $h(t) = 0$ почти всюду;
(ii) если $\Phi(h) < \infty$, то $h(t) < \infty$ почти всюду;
(iii) $\Phi(ah) = a\Phi(h)$ при $a > 0$;
(iv) если $h(t) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} h_j(t)$ почти всюду, то $\Phi(h) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(h_j)$.

Такая функция Φ называется *функциональной нормой*; при этом множество $A(\Phi) = \{a \in A^0 + A^1;\ \Phi(K_a) < \infty\}$ определяет подпространство в $A^0 + A^1$. Отображение $a \to \Phi(K_a)$ задает норму на $A(\Phi)$, которую мы будем обозначать $\|a\|_\Phi$. Если Φ удовлетворяет некоторым общим условиям, то пространство $A(\Phi)$ будет пространством линейной интерполяции между A^0 и A^1. Более того, в этом случае справедлива интерполяционная теорема, которая дает решение задачи (iv), поставленной в п. 5.1: *Пусть T — линейное преобразование из $A^0 + A^1$ в $B^0 + B^1$, отображающее A^j в B^j, $j = 0, 1$, таким образом, что $\|Ta\|_j \leqslant M_j \|a\|_j$ для всех $a \in A^j$. Тогда T отображает $A(\Phi)$ в $B(\Phi)$ и существует постоянная $M = M(\Phi, M_0, M_1)$, такая, что $\|Ta\|_\Phi \leqslant M\|a\|_\Phi$ для всех $a \in A(\Phi)$.* Доказательство этой теоремы особенно просто, если Φ удовлетворяет следующему условию: существует неотрицательная функция ψ на $(0, \infty)$, такая, что $\Phi(h^\lambda) \leqslant \psi(\lambda)\Phi(h)$, где $\lambda > 0$ и $h^\lambda(t) = h(\lambda t)$. Когда это имеет место, $\|Ta\|_\Phi = \Phi(K_{Ta}) \leqslant M_0\Phi(K_a^{M_1/M_0}) \leqslant M_0\psi(M_1/M_0)\Phi(K_a) = M_0\psi(M_1/M_0)\|a\|_\Phi$ (первое неравенство есть следствие предположений о T, а второе вытекает из последнего предположения о Φ). Таким образом, интерполяционная теорема получена, причем $M \leqslant M_0\psi(M_1/M_0)$.

Если, например, $\psi(\lambda)=\lambda^s$ для $0\leqslant s\leqslant 1$, то получаем знакомое неравенство $M\leqslant M_0^{1-s}M_1^s$.

5.10. Когда $A^0=L^1$, $A^1=L^\infty$ и $f\in L^1+L^\infty$, нетрудно показать, что $K_f(t)=\int\limits_0^t f^*(u)\,du$. Следующие замечания показывают, что достаточно рассмотреть только случай $f\geqslant 0$ и что в этом случае $K_f(t)=\inf\{\|f_0\|_{L^1}+t\|f_1\|_{L^\infty};\ f=f_0+f_1,\ f_j\geqslant 0,\ f_j\in A^j,\ j=0,\ 1\}$. Пусть $f=f_0+f_1$; тогда $|f|=(\operatorname{sgn}\bar f)f=(\operatorname{sgn}\bar f)f_0+(\operatorname{sgn}\bar f)f_1=g_0+g_1$. Аналогично, если $|f|=g_0+g_1$, то $f=(\operatorname{sgn}f)g_0+(\operatorname{sgn}f)g_1=f_0+f_1$. В обоих случаях $\|f_0\|_{L^1}+t\|f_1\|_{L^\infty}=\|g_0\|_{L^1}+t\|g_1\|_{L^\infty}$ и, таким образом, $K_f=K_{|f|}$. Когда f вещественна и $f=f_0+f_1$, имеем $f=\operatorname{Re}f_0+\operatorname{Re}f_1$, так что при определении K_f достаточно рассматривать только вещественные функции f_0 и f_1. Наконец, если $f\geqslant 0$ и $f=f_0+f_1$, положим $f_0'=\inf\{f_0^+,f\}$ и $f_1'=f-f_0'$. Тогда $f=f_0'+f_1'$, $0\leqslant f_0'\leqslant f_0^+\leqslant|f_0|$ и $0\leqslant f_1'=f-f_0'\leqslant|f-f_0|=|f_1|$. Следовательно, $\|f_0'\|_{L^1}+t\|f_1'\|_{L^\infty}\leqslant\|f_0\|_{L^1}+t\|f_1\|_{L^\infty}$. Можно, следовательно, считать, что $f=f_0+f_1$, где все три функции неотрицательны. Пусть $s=\|f_1\|_{L^\infty}$; положим $f^{(s)}=f\wedge s=\inf\{f,s\}$ и $g=f-f^{(s)}$. Изменяя, если необходимо, f_1 на множестве меры 0, можно считать, что $0\leqslant f_1(x)\leqslant s$ для всех x. Так как $f_1\leqslant f$, то $f_1\leqslant f^{(s)}$ и, следовательно, $g=f-f^{(s)}\leqslant f-f_1=f_0$. Отсюда следует, что $\|g\|_{L^1}+t\|f^{(s)}\|_{L^\infty}=\|g\|_{L^1}+st\leqslant\|f_0\|_{L^1}+st\leqslant\|f_0\|_{L^1}+t\|f_1\|_{L^\infty}$. Таким образом, для $f\geqslant 0$ получаем $K_f(t)=\inf\limits_{s\leqslant 0}\{\|f-f^{(s)}\|_{L^1}+ts;\ f^{(s)}=f\wedge s\}$. Если λ — функция распределения для f и $s_0=\inf\{s;\ \lambda(s)<t\}$, то, как сейчас будет показано, $K_f(t)=\|f-f^{(s_0)}\|_{L^1}+ts_0$. Предположим сначала, что $s_1>s_0$; тогда разность $f^{(s_1)}(x)-f^{(s_0)}(x)$ равна 0 при $f(x)\leqslant s_0$, равна $f(x)-s_0$ при $s_0<f(x)\leqslant s_1$ и равна s_1-s_0 при $s_1<f(x)$. Тогда, поскольку $\lambda(s_0)\leqslant t$,

$$
\begin{aligned}
\|f-f^{(s_1)}\|_{L^1}+ts_1-(\|f-f^{(s_0)}\|_{L^1}+ts_0)=&\\
=t(s_1-s_0)-\int(f^{(s_1)}-f^{(s_0)})\,d\mu\geqslant&\\
\geqslant\lambda(s_0)(s_1-s_0)-\int\limits_{f(x)>s_0}(f^{(s_1)}-f^{(s_0)})\,d\mu\geqslant&\\
\geqslant\lambda(s_0)(s_1-s_0)-\lambda(s_0)(s_1-s_0)=0.&
\end{aligned}
$$

Предположим, что $s_1 < s_0$ и $s_1 \leqslant s < s_0$. Для s из этого интервала $\lambda(s) \geqslant t$; следовательно,

$$\|f - f^{(s_1)}\|_{L^1} + ts_1 - (\|f - f^{(s)}\|_{L^1} + st) \geqslant$$
$$\geqslant \int_{f(x)>s_1} (f^{(s)} - f^{(s_1)})\, d\mu - \lambda(s)(s - s_1) \geqslant$$
$$\geqslant \int_{f(x)>s} (s - s_1)\, d\mu - \lambda(s)(s - s_1) = 0.$$

По непрерывности неравенство $\|f - f^{(s_1)}\|_{L^1} + ts_1 \geqslant \|f - f^{(s)}\|_{L^1} + ts$ должно выполняться и для $s = s_0$, и мы показали, что $K_f(t) = \|f - f^{(s_0)}\|_{L^1} + ts_0$. Из определения f^* следует, что $f^*(u) = s_0$ при $\lambda(s_0) \leqslant u < t$. Вместе с равенством (ii) леммы 3.17 это дает:

$$K_f(t) = \int (f - f^{(s_0)})\, d\mu + ts_0 = \int_{f(x)>s_0} f d\mu - s_0\lambda(s_0) + ts_0 =$$
$$= \int_0^{\lambda(s_0)} f^*(u)\, du + \int_{\lambda(s_0)}^{t} f^*(u)\, du = \int_0^t f^*(u)\, du.$$

Если теперь выбрать функциональную норму

$$\Phi(h) = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty (t^{(1/p)-1}h(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q},$$

то видно, что пространство $A(\Phi)$, определенное в п. 5.9, совпадает с $L(p, q)$ при $1 < p \leqslant \infty$ и что эта норма совпадает с $\|\ \|_{pq}$.

5.11. В § 1 этой главы была дана геометрическая интерпретация теоремы М. Рисса о выпуклости в терминах точек единичного квадрата $Q = \{(\alpha, \beta);\ 0 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant 1\}$. Аналогичную интерпретацию допускает теорема Марцинкевича 2.4, однако в этом случае используются только точки «нижнего треугольника» $\{(\alpha, \beta) \in Q;\ \alpha \geqslant \beta\}$. Можно показать на примере, что для «верхнего треугольника» эта теорема не справедлива (см. Хант [1]). В своей работе [2] М. Рисс показал, что его теорема о выпуклости справедлива для всего единичного квадрата Q только в том случае, когда рассматриваемые L^p-пространства состоят из комплекснозначных функций. Для случая, когда рассматриваются только вещественнозначные функции, М. Рисс привел примеры, показывающие, что утверждение о выпуклости нарушается в верхнем треугольнике, оставаясь верным для нижнего треугольника. Из комплексного случая, однако, немедленно следует, что при условиях теоремы 1.3 существует постоянная k_t (возможно, превосходящая $k_0^{1-t}k_1^t$), такая, что оператор T будет

типа $(p_t,\ q_t)$ с $(p_t,\ q_t)$-нормой $\leqslant k_t$. В этой связи интересно отметить, что практически все операторы, возникающие естественным образом в гармоническом анализе, имеют тип (или слабый тип) $(p,\ q)$ для некоторых p и q, таких, что $p \leqslant q$; поэтому интерполяционные результаты, отвечающие точкам «нижнего треугольника», достаточны для наших целей.

5.12. Если $p = 1$ и $1 < q \leqslant \infty$, то не существует нормы, эквивалентной $\|\ \|^*_{p,q}$, так что пространства $L(p,\ q)$ в этом случае нельзя нормировать. Покажем это в случае, когда $q = \infty$. На E_1 рассмотрим последовательность функций $\{f_k\}$, определенных равенствами $f_k(x) = 1/|x + k|$. Тогда $f_k \in L(1,\ \infty)$ при каждом k и $\|f_k\|^*_{1,\infty}$ не зависит от k. Пусть $f = \sum\limits_{k=1}^{N} f_k$. Если бы $\|\ \|$ была нормой, эквивалентной $\|\ \|^*_{1,\infty}$, то для некоторой постоянной C_1 выполнялось бы неравенство $\|f\| \leqslant C_1 N$. Однако $f(x) \geqslant C_2 \log N$ для $0 \leqslant x \leqslant N$, так что $\|f^*\|_{1,\infty} \geqslant C_2 N \log N$. Устремляя $N \to \infty$, приходим к противоречию. Доказательство для $1 < q < \infty$ проводится аналогичным образом.

Библиографические замечания

Теорема Марцинкевича была впервые сформулирована им в работе [2], где была приведена схема доказательства для «главной диагонали» $\{(\alpha, \beta) \in Q;\ \alpha = \beta\}$. Ее первое доказательство для «нижнего треугольника» вместе со многими важными приложениями было впервые опубликовано Зигмундом [2]. Доказательство теоремы М. Рисса о выпуклости, приведенное в этой главе, было найдено Торином [1] и независимо Тамаркиным и Зигмундом [1]. Интерполяция аналитических семейств операторов введена Стейном [2]. Близкий результат, также использующий лемму 4.2, можно найти у Хиршмана [1]. Обобщение этого типа интерполяции на H^p-пространства получено Стейном и Г. Вейсом [3]. Пространства $L\ (p,\ q)$ были введены Лоренцем [2]. Кальдерон первым использовал функцию m_{f^*} и указал, как она индуцирует норму на $L\ (p,\ q)$. Общую теорию таких пространств см. у Ханта [1] и Оклендера [1]. Наше изложение результатов, ведущих к интерполяционной теореме 3.15, следует Ханту [1]. Близкие результаты см. у Стейна и Г. Вейса [2], Крейна и Семенова [1], Кальдерона [2] и Лионса и Петре [1]. Имеются две обзорные статьи, описывающие различные общие методы интерполяции и их связь между собой; первая из них — статья Крейна и Петунина [1], вторая — Madженеса [1]. Неравенства слабого типа для преобразования Гильберта восходят к Колмогорову [1], Безиковичу [1] и Титчмаршу [1].

Глава VI

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И СИСТЕМЫ СОПРЯЖЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Мы уже встречали преобразование Гильберта в третьей и в пятой главах. Оба раза его свойства изучались на базе теории функций одного комплексного переменного. В § 1 этой главы развивается вещественный подход к изучению преобразования Гильберта. В § 2 показывается, как эти результаты можно применить к изучению основных свойств одного класса сингулярных интегральных операторов, а именно операторов с нечетным ядром. Третий параграф посвящен введению более широкого класса сингулярных интегральных операторов. Наконец, в § 4 показывается, как многие такие операторы связаны с системами уравнений в частных производных, обобщающими уравнения Коши — Римана. Эти системы позволяют развить еще один подход к комплексным методам гармонического анализа нескольких переменных. В частности, вводится теория H^p-пространств, в некотором смысле параллельная теории, развитой в третьей главе.

1. Преобразование Гильберта

В § 2 гл. V было введено преобразование Гильберта $\tilde{f}$ функции $f \in L^p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$. Мы определили его как предел при $y > 0$, стремящемся к 0, функции $v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x - t)\, [t/(t^2 + y^2)]\, dt$. С использованием свойств аналитических функций ыло показано, что этот предел существует для почти всех x. Учитывая этот факт, естественно спросить, нельзя ли определить $\tilde{f}$ прямо равенством $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [f(x - t)/t]\, dt$. К сожалению, этот интеграл не определен даже для очень гладких функций $f \in L^p(-\infty, \infty)$. Если, однако, рассмотреть его в смысле главного значения (см. (4.4) в гл. V), то получим

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int\limits_{0 < \varepsilon \leqslant |t|} \frac{f(x - t)}{t}\, dt \tag{1.1}$$

для почти всех вещественных x. Это есть непосредственное следствие леммы 2.6 гл. V и следующего утверждения:

Лемма 1.2. *Пусть* $f \in L^p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$; *тогда*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \frac{t}{t^2+\varepsilon^2}\, dt - \int_{0<\varepsilon \leqslant |t|} \frac{f(x-t)}{t}\, dt \right\} = 0$$

во всех точках x *лебегова множества функции* f.

Доказательство. Положим

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t^2+1} - \dfrac{1}{t} & \text{при } |t| \geqslant 1, \\[2mm] \dfrac{t}{t^2+1} & \text{при } |t| < 1, \end{cases}$$

и $\varphi_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\varphi(t/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \frac{t}{t^2+\varepsilon^2}\, dt - \int_{0<\varepsilon \leqslant |t|} \frac{f(x-t)}{t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)\, dt.$$

Поскольку

$$(1.3) \qquad \psi(x) = \sup_{|t| \geqslant |x|} |\varphi(t)| = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|(1+x^2)} & \text{при } |x| \geqslant 1, \\[2mm] \dfrac{1}{2} & \text{при } |x| < 1, \end{cases}$$

имеем $\psi \in L^1(-\infty, \infty)$. Итак, по теореме 1.25 гл. I и в силу того, что $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt = 0$ (поскольку φ нечетна), мы имеем

$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)\, dt = f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt = 0$, и лемма доказана.

В предыдущей главе было показано, что преобразование Гильберта имеет тип (p, p) для $1 < p < \infty$. Покажем, что *максимальное преобразование Гильберта,* переводящее $f \in L^p(-\infty, \infty)$ в функцию со значениями

$$\sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\pi} \left| \int_{|t| > \varepsilon} f(x-t) \frac{dt}{t} \right|,$$

также имеет тип (p, p). Более точно, докажем следующее утверждение:

Теорема 1.4. *Если* $f \in L^p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \infty$, *то*

$$(Mf)(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\pi} \left| \int_{|t| > \varepsilon} f(x-t) \frac{dt}{t} \right| \leqslant \frac{1}{\pi} \|\psi\|_1 m_{\tilde{f}}(x) + m_{\tilde{f}}(x),$$

где ψ — функция, определенная равенством (1.3), *а* m_f *и* $m_{\tilde f}$ — *максимальные функции Харди — Литтлвуда функций* f и $\tilde f$. *В частности, существует постоянная* B_p, *не зависящая от* $\in L^p(-\infty,\infty)$ *и такая, что*

$$\|Mf\|_p \leqslant B_p \|f\|_p.$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{0<\varepsilon\leqslant|t|} \frac{f(x-t)}{t}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\frac{t}{t^2+\varepsilon^2}\,dt - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,\varphi_\varepsilon(t)\,dt.$$

Поскольку ψ — радиальная и невозрастающая функция, из равенства (3.9) гл. II следует, что

$$\sup_{\varepsilon>0}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,\varphi_\varepsilon(t)\,dt\right| \leqslant \|\psi\|_1\, m_f(x).$$

Таким образом, теорема будет доказана, если показать, что

$$\sup_{\varepsilon>0}\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\frac{t}{t^2+\varepsilon^2}\,dt\right| \leqslant m_{\tilde f}(x).$$

Но это неравенство вытекает из теоремы 3.10 гл. II и следующего равенства:

Лемма 1.5. *Пусть* $f\in L^p(-\infty,\infty)$, $1<p<\infty$, *и* $y>0$; *тогда*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\frac{t}{t^2+y^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde f(x-t)\frac{y}{t^2+y^2}\,dt.$$

Доказательство. Левая часть этого равенства является сверткой функции f с сопряженным ядром Пуассона $Q_y(t) = (1/\pi)[t/(t^2+y^2)]$, введенным в п. 6.13 гл. III, в то время как правая часть — свертка $\tilde f$ с ядром Пуассона $P_y(t) = (1/\pi)[y/(t^2+y^2)]$. Поскольку Q_y и P_y принадлежат $L^{p'}(-\infty,\infty)$ при $(1/p)+(1/p')=1$ и всех $y>0$, то из неравенства Гёльдера и (2.11) гл. V следует, что достаточно доказать лемму для f из плотного подмножества пространства L^p. Предположим, следовательно, что f лежит в классе $\mathscr{S}$ основных функций, введенных в первой главе. Тогда, в частности, $f\in L^2(-\infty,\infty)$ и, в силу (2.11) гл. V, $\tilde f$ также принадлежит $L^2(-\infty,\infty)$ и определено ее преобразование Фурье $(\tilde f)^\wedge$. Нетрудно показать, что

$$(\tilde f)^\wedge(x) = (-i\,\mathrm{sgn}\,x)\hat f(x). \tag{1.6}$$

Действительно, в п. 6.13 гл. III было показано, что

$$\hat{Q}_y(x) = (-i \operatorname{sgn} x)\, e^{-2\pi|yx|}.$$

Таким образом, $(Q_y * f)^\wedge(x) = \hat{Q}_y(x)\hat{f}(x) = (-i \operatorname{sgn} x)\, e^{-2\pi|yx|}\hat{f}(x)$, и из теоремы Планшереля следует, что $Q_y * f$ при $y \to 0$ стремится (по L^2-норме) к функции g, преобразование Фурье которой равно $(-i \operatorname{sgn} x)\hat{f}(x)$. С другой стороны, из леммы 2.6 гл. V следует, что $(Q_y * f)(x) \to \tilde{f}(x)$ почти всюду при $y \to 0$. Поэтому $\tilde{f}$ и g должны совпадать почти всюду и справедливо равенство (1.6). Для того чтобы доказать (1.5), достаточно показать, что равны преобразования Фурье обеих частей. Из (1.6) и теоремы 1.14 гл. I имеем $(\tilde{f} * P_y)^\wedge(x) = (\tilde{f})^\wedge(x)\, e^{-2\pi|yx|} = (-i \operatorname{sgn} x)\hat{f}(x)\, e^{-2\pi|yx|}$. Но выше было показано, что последнее выражение равно $(f * Q_y)^\wedge(x)$. Это доказывает лемму и, следовательно, теорему 1.4.

Наша цель — обобщить эти результаты на n измерений. Для этого необходимо прежде всего найти подходящее обобщение преобразования Гильберта. Один из способов такого обобщения заключается во введении ядра

$$K(t) = \frac{\Omega(t)}{|t|^n}, \quad t \neq 0, \tag{1.7}$$

где Ω — нечетная однородная функция степени 0 (т. е. $\Omega(at) = \Omega(t)$ для всех положительных чисел a)[1]. Когда $n = 1$, а $\Omega(t) = (\operatorname{sgn} t)/\pi$, свертка f с K (в смысле главного значения) дает преобразование Гильберта функции f. Таким образом, ввиду приведенных выше результатов естественно выяснить, определен ли оператор

$$(Hf)(x) = \lim \int\limits_{\delta \geqslant |t| \geqslant \varepsilon > 0} f(x-t)\, K(t)\, dt, \quad \varepsilon \to 0, \quad \delta \to \infty, \tag{1.8}$$

для $f \in L^p(E_n)$, $1 < p < \infty$, и отображает ли он непрерывно это пространство в себя[2]. В следующем параграфе будет показано,

---

[1] Если в качестве ядра $K(t)$ взять мнимую часть граничного значения ядра Коши $K(z) = \int\limits_{\Gamma^*} e^{2\pi i z \cdot t} dt$, то можно построить теорию, полностью аналогичную одномерному случаю. Соответствующая теория в рамках обобщенных функций медленного роста построена В. С. Владимировым [2].— *Прим. перев.*

[2] В одномерном случае интеграл $\int\limits_{0 < \varepsilon \leqslant |t|} [f(x-t)/t]\, dt$ определен, так как для $f \in L^p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \infty$, подинтегральное выражение является произведением сдвига f (который также принадлежит L^p) и L^q-функции, $(1/p) + (1/q) = 1$, со значениями $1/t$ при $|t| \geqslant \varepsilon$ и 0 в остальных случаях. Не сразу ясно, однако, что, рассматривая вместо (1.8) интегралы $\int\limits_{|t| \geqslant \varepsilon > 0} f(x-t)\, K(t)\, dt$,

в частности, что это и в самом деле имеет место при условии, что Ω интегрируема на единичной сфере Σ_{n-1} $\left(\text{т. е. } \int\limits_{\Sigma_{n-1}} |\Omega(t')|\, dt' < \infty\right)$. Такой оператор называют *сингулярным интегральным оператором с нечетным ядром*.

Другое более общее ядро получается, если предположить только, что Ω интегрируема на единичной сфере и

$$\int\limits_{\Sigma_{n-1}} \Omega(t')\, dt' = 0.$$

Это условие, очевидно, выполняется, когда Ω — нечетная функция. В § 3 будут обсуждаться операторы, определяемые равенством (1.8), где ядро K имеет вид (1.7), а Ω удовлетворяет этому более общему условию. Изучение таких операторов, однако, сложнее, чем изучение сингулярных интегральных операторов с нечетными ядрами. Для того чтобы показать, что такой оператор имеет тип (p, p), $1 < p < \infty$, например, необходимо наложить условия, более сильные, чем интегрируемость Ω на Σ_{n-1}.

2. Сингулярные интегральные операторы с нечетным ядром

Пусть K — ядро, определенное равенством (1.7), и Ω — нечетная однородная функция степени 0, интегрируемая на Σ_{n-1}. Заметим сначала, что для каждого $\varepsilon > 0$ и $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p < \infty$,

$$\int\limits_{\delta \geqslant |t| \geqslant \varepsilon} f(x-t) \frac{\Omega(t)}{|t|^n}\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma_{n-1}} \Omega(t') \left\{ \int\limits_{\delta \geqslant |r| \geqslant \varepsilon} \frac{f(x-rt')}{r}\, dr \right\} dt'. \tag{2.1}$$

Для доказательства этого равенства выразим t в сферических координатах $t = rt'$, где $|t| = r$ и $t' \in \Sigma_{n-1}$; тогда получим

$$\int\limits_{\delta \geqslant |t| \geqslant \varepsilon} f(x-t) \frac{\Omega(t)}{|t|^n}\, dt = \int\limits_{\varepsilon}^{\delta} \left\{ \int\limits_{\Sigma_{n-1}} f(x-rt') \Omega(t')\, dt' \right\} \frac{dr}{r} =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_{n-1}} \Omega(t') \left\{ \int\limits_{\varepsilon}^{\delta} f(x-rt') \frac{dr}{r} \right\} dt'.$$

мы получим корректно определенный объект. Можно показать, что этот интеграл имеет смысл, но мы предпочитаем не делать этого здесь (см. п. 5.5, где подробнее исследуется этот вопрос и аналогичные вопросы для интегралов, рассмотренных в следующем параграфе). Заметим, что при наложенных ниже ограничениях интеграл (1.8) сходится абсолютно для почти всех x.

С другой стороны, поскольку Ω — нечетная функция, последнее выражение равно

$$\int\limits_{\Sigma_{n-1}} \Omega(-t')\left\{-\int\limits_{\varepsilon}^{\delta} f(x-rt')\frac{dr}{r}\right\}dt' =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_{n-1}} \Omega(-t')\left\{\int\limits_{-\delta}^{-\varepsilon} f(x+rt')\frac{dr}{r}\right\}dt' =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_{n-1}} \Omega(t')\left\{\int\limits_{-\delta}^{-\varepsilon} f(x-rt')\frac{dr}{r}\right\}dt'.$$

Таким образом,

$$2\int\limits_{\delta\geqslant|t|\geqslant\varepsilon} f(x-t)\frac{\Omega(t)}{|t|^n}\,dt =$$

$$= \int\limits_{\delta\geqslant|t|\geqslant\varepsilon} f(x-t)\frac{\Omega(t)}{|t|^n}\,dt + \int\limits_{\delta\geqslant|t|\geqslant\varepsilon} f(x-t)\frac{\Omega(t)}{|t|^n}\,dt =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_{n-1}} \Omega(t')\left\{\int\limits_{-\delta}^{-\varepsilon} f(x-rt')\frac{dr}{r}\right\}dt' + \int\limits_{\Sigma_{n-1}} \Omega(t')\left\{\int\limits_{\varepsilon}^{\delta} f(x-rt')\frac{dr}{r}\right\}dt' =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_{n-1}} \Omega(t')\left\{\int\limits_{\delta\geqslant|r|\geqslant\varepsilon} f(x-rt')\frac{dr}{r}\right\}dt',$$

и (2.1) доказано.

Обозначим через $1 = (1, 0, \ldots, 0) \in E_n$ первый вектор стандартного базиса в E_n и для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n$ положим

$$(H^{(1)}_{\varepsilon,\delta}f)(x) = \int\limits_{\delta\geqslant|s|\geqslant\varepsilon} f(x-s1)\frac{ds}{s} = \int\limits_{\delta\geqslant|s|\geqslant\varepsilon} f(x_1-s, x_2, \ldots, x_n)\frac{ds}{s}.$$

Пусть σ — элемент группы вращений $SO(n)$, действующей в E_n; обозначим через R_σ оператор, действующий по правилу

$$(R_\sigma f)(x) = f(\sigma x),$$

где f — функция на E_n.

Лемма 2.2. *Если $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p < \infty$, то*

$$\int\limits_{\delta\geqslant|t|\geqslant\varepsilon} f(x-t)\frac{\Omega(t')}{|t|^n}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{SO(n)} (R_{\sigma^{-1}}H^{(1)}_{\varepsilon,\delta}R_\sigma f)(x)\,\Omega(\sigma 1)\,d\sigma,$$

где $d\sigma$ — элемент меры Хаара на группе $SO(n)$, нормированный так, что $\int\limits_{SO(n)} d\sigma = |\Sigma_{n-1}|$ есть лебегова мера сферы Σ_{n-1}.

Доказательство. В силу (4.14) гл. I, имеем

$$\int\limits_{\Sigma_{n-1}} \left\{ \int\limits_{\delta \geq |r| \geq \varepsilon} \frac{f(x - rt')}{r} \, dr \right\} \Omega(t') \, dt' =$$

$$= \int\limits_{SO(n)} \left\{ \int\limits_{\delta \geq |r| \geq \varepsilon} \frac{f(x - r\sigma 1)}{r} \, dr \right\} \Omega(\sigma 1) \, d\sigma =$$

$$= \int\limits_{SO(n)} \left\{ \int\limits_{\delta \geq |r| \geq \varepsilon} (R_\sigma f)(\sigma^{-1} x - r 1) \frac{dr}{r} \right\} \Omega(\sigma 1) \, d\sigma =$$

$$= \int\limits_{SO(n)} (R_{\sigma^{-1}} H^{(1)}_{\varepsilon, \delta} R_\sigma f)(x) \, \Omega(\sigma 1) \, d\sigma.$$

Очевидно, что лемма теперь следует из равенства (2.1).

Из этой леммы непосредственно получаем, что для $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p < \infty$,

$$(2.3) \qquad 2 \cdot \sup_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \delta > 0}} \left| \int\limits_{\delta \geq |t| \geq \varepsilon} f(x - t) \frac{\Omega(t')}{|t|^n} \, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{SO(n)} \sup_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \delta > 0}} |(R_{\sigma^{-1}} H^{(1)}_{\varepsilon, \delta} R_\sigma f)(x) \, \Omega(\sigma 1)| \, d\sigma.$$

Пусть $M^{(1)}_g$ для $g \in L^p(E_n)$, $1 < p \leqslant \infty$, определено равенством

$$M^{(1)}_g(x) = \sup_{r > 0} (2r)^{-1} \int\limits_{|t| \leqslant r} |g(x_1 - t, x_2, \ldots, x_n)| \, dt.$$

Как было отмечено во второй главе, из теоремы 3.7 гл. II следует, что $M^{(1)}_g \in L^p(E_n)$ и

$$\| M^{(1)}_g \|_p \leqslant b \| g \|_p,$$

где $b = b(p, n)$ зависит от p и n, но не зависит от g. Тогда, в силу теоремы 1.4, имеем [1])

$$\sup_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \delta > 0}} |(R_{\sigma^{-1}} H^{(1)}_{\varepsilon, \delta} R_\sigma f)(x)| \leqslant 2\pi \| \psi \|_1 M^{(1)}_{R_\sigma f}(\sigma^{-1} x) + 2 M^{(1)}_{H^{(1)}_{\varepsilon, \delta} R_\sigma f}(\sigma^{-1} x).$$

---

[1]) Поскольку $\left| \int\limits_{\delta \geq |t| \geq \varepsilon} f(x - t) \frac{dt}{t} \right| \leqslant \left| \int\limits_{|t| \geq \varepsilon} f(x - t) \frac{dt}{t} \right| + \left| \int\limits_{|t| < \delta} f(x - t) \frac{dt}{t} \right|$, из теоремы 1.4 следует, что

$$\sup_{\varepsilon > 0, \delta > 0} \left| \int\limits_{\delta \geq |t| \geq \varepsilon} f(x - t) \frac{dt}{t} \right| \leqslant 2 \| \psi \|_1 m_f(x) + 2 m_{\tilde{f}}(x).$$

Таким образом, из теоремы 1.4, поскольку R_σ — изометрический оператор на $L^p(E_n)$, следует, что для $1 < p < \infty$

$$(2.4)\qquad \left(\int\limits_{E_n}\left\{\sup_{\substack{\varepsilon>0\\ \delta>0}}\left|(R_{\sigma^{-1}}H^{(1)}_{\varepsilon,\sigma}R_\sigma f)(x)\right|\right\}^p dx\right)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant 2(\pi b\|\psi\|_1 + B_p)\|f\|_p = C_p\|f\|_p$$

Применяя теперь интегральное неравенство Минковского, неравенства (2.3) и (2.4), получаем

$$(2.5)\qquad \left(\int\limits_{E_n}\left\{\sup_{\substack{\varepsilon>0\\ \delta>0}}\left|\int\limits_{\delta\geqslant|t|\geqslant\varepsilon} f(x-t)\frac{\Omega(t')}{|t|^n}dt\right|\right\}^p dx\right)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant C_p\left(\int\limits_{\Sigma_{n-1}}|\Omega(t')|\,dt'\right)\|f\|_p = A_p\|f\|_p.$$

Можно, следовательно, применить теорему 3.12 гл. II и получить следующий результат о существовании и ограниченности сингулярных интегральных операторов с нечетным ядром:

Теорема 2.6. *Пусть $f \in L^p(E_n)$, $1 < p < \infty$; тогда*

$$(Hf)(x) = \lim_{\delta\to\infty,\varepsilon\to 0}\int\limits_{\delta\geqslant|t|\geqslant\varepsilon>0} f(x-t)K(t)\,dt$$

существует для почти всех $x \in E_n$. Кроме того, существует постоянная $c = c(p, n)$, зависящая от p и от размерности n, но не зависящая от f, такая, что

$$\|Hf\|_p \leqslant c\|f\|_p.$$

Важный класс сингулярных интегральных операторов с нечетным ядром составляют *преобразования М. Рисса*. В n-мерном пространстве это n сингулярных интегральных операторов $R_1, R_2, \ldots$ $\ldots, R_n$, определяемые ядрами

$$K_j(x) = c_n(x_j'/|x|^n) = c_n(x_j/|x|^{n+1}),$$

где

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_n,\quad j = 1, 2, \ldots, n, \text{ и } c_n = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\pi^{(n+1)/2}}$$

(при $n = 1$ получаем единственный оператор — преобразование Гильберта). В силу теоремы 4.5 гл. IV, каждое такое ядро определяет обобщенную функцию медленного роста, преобразование Фурье которой есть функция со значением

$$\hat{K}_j(t) = -i\frac{t_j}{|t|} \text{ в точке } t = (t_1, \ldots, t_n).$$

Поэтому если φ — основная функция, то $(K_j * \varphi)^\wedge(t) = -i(t_j/|t|)\hat{\varphi}(t)$ (см. теорему 3.18 гл. I). Тогда из теоремы 2.6 следует, что

$$(R_jf)^\wedge(t) = -i\frac{t_j}{|t|}\hat{f}(t) \tag{2.7}$$

почти всюду для всех $f \in L^2(E_n)$. Кроме того, поскольку R_jf также принадлежит $L^2(E_n)$, имеем

$$(R_j^2f)^\wedge(t) = -\frac{t_j^2}{|t|^2}\hat{f}(t).$$

Отсюда

$$\left(\sum_{j=1}^{n} R_j^2 f\right)^\wedge(t) = -\hat{f}(t) \tag{2.8}$$

для всех $f \in L^2(E_n)$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} R_j^2 = -I, \tag{2.9}$$

где I — единичный оператор на $L^p(E_n)$, $1 < p < \infty$.

Из тождества (2.7) и теоремы Планшереля следует также «унитарность» преобразований Рисса:

$$\sum_{j=1}^{n} \| R_jf \|_2^2 = \| f \|_2^2. \tag{2.10}$$

3. Сингулярные интегральные операторы с четным ядром

Перейдем теперь к изучению сингулярных интегральных операторов, ассоциированных с ядрами вида (1.7), где функция Ω однородна степени 0, интегрируема на Σ_{n-1} и $\int\limits_{\Sigma_{n-1}} \Omega(t')dt' = 0$. Представим Ω в виде суммы

$$\Omega(t') = \frac{\Omega(t') - \Omega(-t')}{2} + \frac{\Omega(t') + \Omega(-t')}{2} = \Omega^{(1)}(t') + \Omega^{(2)}(t'),$$

где $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ — соответственно нечетная и четная части функции Ω. Теорема 2.6 применима к оператору, ассоциированному с ядром $\Omega^{(1)}(t)/|t|^n$, и можно заключить, в частности, что этот оператор непрерывно отображает $L^p(E_n)$ в себя. Однако, как было отмечено в конце § 1 этой главы, для того чтобы получить подобное заключение об операторе, ассоциированном с ядром $K(t) = \Omega(t)/|t|^n$,

необходимо наложить дополнительные ограничения на Ω. Покажем, что такой оператор непрерывно отображает $L^p(E_n)$, $1 < p < \infty$, в себя, если $\|\Omega\| = \left(\int\limits_{\Sigma_{n-1}} |\Omega(t')|^2 \, dt'\right)^{1/2} < \infty$. Точнее, докажем следующую теорему:

Теорема 3.1. *Пусть K — ядро вида $K(t) = \Omega(t)/|t|^n$, где $\|\Omega\| = \left(\int\limits_{\Sigma_{n-1}} |\Omega(t')|^2 \, dt'\right)^{1/2} < \infty$, $\int\limits_{\Sigma_{n-1}} \Omega(t')\, dt' = 0$ и Ω — однородная функция степени 0. Тогда $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|t|\geqslant\varepsilon>0} \varphi(x-t) K(t)\, dt = (K*\varphi)(x)$ существует для всех $x \in E_n$ и основных функций $\varphi \in \mathcal{S}$. Кроме того, если $1<p<\infty$, то существует постоянная $c = c(p, n)$, зависящая только от p и размерности n и такая, что*

$$\|K*\varphi\|_p \leqslant c\|\varphi\|_p$$

для всех основных функций φ.

Поскольку из условия $\|\Omega\| < \infty$ следует, что такое же условие должно выполняться и для четной части $\Omega^{(2)}$, и поскольку мы уже знаем, что приведенная теорема справедлива для (более общих) нечетных ядер, можно считать, что Ω — четная функция. В этом случае идею доказательства теоремы можно кратко описать следующим образом. Если T — сингулярный интегральный оператор, ассоциированный с ядром K, то рассмотрим его суперпозицию с преобразованием Рисса R_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, и покажем, что эта суперпозиция R_jT определяет сингулярный интегральный оператор, с нечетным ядром изученного в предыдущем параграфе типа. Тогда существует постоянная a_p, такая, что $\|R_jT\varphi\|_p \leqslant a_p\|\varphi\|_p$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}$. Отсюда, в силу теоремы 2.6, $\|R_j(R_jT\varphi)\|_p \leqslant b_p\|R_jT\varphi\|_p \leqslant b_pa_p\|\varphi\|_p$. Но из (2.9) следует, что $\|T\varphi\|_p = \left\|\left(\sum\limits_{j=1}^n R_j^2\right)T\varphi\right\|_p \leqslant \sum\limits_{j=1}^n \|R_j(R_jT\varphi)\|_p \leqslant nb_pa_p\|\varphi\|_p = c\|\varphi\|_p$.

Остальная часть этого параграфа посвящена уточнению этих рассуждений. Ряд необходимых для этого утверждений уже был получен в § 4 гл. IV. Существование предела

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|t|\geqslant\varepsilon} \varphi(x-t) K(t)\, dt$$

было установлено в рассуждениях, предшествующих теореме 4.7. Согласно теореме 4.7 указанной главы, преобразование Фурье функции K, рассматриваемое как обобщенная функция в смысле главного значения, однородно степени 0. Поэтому существует Ω_0, определенная на Σ_{n-1} и такая, что $\hat{K}(x) = \Omega_0(x') = \Omega_0(x/|x|)$,

$x \neq 0$. Далее, если $\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} Y^{(k)}$ — разложение Ω в ряд по сферическим гармоникам на Σ_{n-1} ($Y^{(k)}$ — сферическая гармоника степени k, и ряд сходится по норме в $L^2(\Sigma_{n-1})$), то Ω_0 имеет разложение $\Omega_0 = \sum_{k=1}^{\infty} Y_0^{(k)}$, где $Y_0^{(k)} = \gamma_k Y^{(k)}$,

$$\gamma_k = i^{-k} \pi^{n/2} \frac{\Gamma(k/2)}{\Gamma[(n+k)/2]} = O(k^{-(n/2)}). \tag{3.2}$$

В силу следствия 4.12 гл. IV, функция Ω_0 непрерывна на Σ_{n-1} и, значит, ограничена[1]. Тогда функция $\hat{K}$ также ограничена, и потому, в силу теоремы 3.18 гл. I, оператор T, переводящий функцию $\varphi \in \mathscr{S}$ в функцию $T\varphi = K * \varphi \in L^2(E_n)$, удовлетворяет оценке $\|T\varphi\|_2 = \|K * \varphi\|_2 \leqslant \|\hat{K}\|_\infty \|\varphi\|_2$, и $(T\varphi)\hat{}\,(t) = \hat{K}(t)\,\hat{\varphi}(t) = \Omega_0(t/|t|)\,\hat{\varphi}(t)$ для $t \neq 0$ из E_n.

Поскольку $T\varphi$ принадлежит $L^2(E_n)$, преобразование Рисса $R_j T\varphi$ функции $T\varphi$ существует (см. теорему 2.6) и принадлежит $L^2(E_n)$. Используя тогда равенство (2.7), получим

$$(R_j T\varphi)\hat{}\,(t) = -i\frac{t_j}{|t|}(T\varphi)\hat{}\,(t) = -i\frac{t_j}{|t|}\Omega_0\left(\frac{t}{|t|}\right)\hat{\varphi}(t). \tag{3.3}$$

Положим $\omega_0(t') = -it'_j\Omega_0(t')$ для $t' = (t'_1, \ldots, t'_n) \in \Sigma_{n-1}$ и рассмотрим функцию, принимающую в точке $t \neq 0$ из E_n значение $\omega_0(t/|t|)$. Покажем, что эта функция есть преобразование Фурье обобщенной функции в смысле главного значения, определяемой нечетным ядром обсуждавшегося в § 2 типа. Для этого используем следующий результат:

Лемма 3.4. *Пусть $Y^{(k)}$, $k \geqslant 1$, — сферическая гармоника степени k и j — целое число, такое, что $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда существуют сферические гармоники $W^{(k-1)}$ и $W^{(k+1)}$ степеней $k-1$ и $k+1$ соответственно, такие, что*

$$t_j Y^{(k)}(t) = W^{(k-1)}(t) + W^{(k+1)}(t)$$

для всех $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma_{n-1}$.

Доказательство. В силу следствий 2.3 и 2.4 гл. IV, достаточно показать, что $\int_{\Sigma_{n-1}} t_j Y^{(k)}(t)\, W^{(l)}(t)\,dt = 0$, если $W^{(l)}$ — сферическая гармоника степени $l \neq k-1$, $k+1$. Пусть $P^{(k)}$ и

---

[1] Непрерывность Ω_0, как было показано, следует из представления, полученного в теореме 4.11 гл. IV.

$Q^{(l)}$ — соответствующие пространственные сферические гармоники и $u(x) = x_j P^{(k)}(x)$, $v(x) = Q^{(l)}(x)$. Тогда $\Delta v \equiv 0$, а

$$(\Delta u)(x) = x_j (\Delta P^{(k)})(x) + 2\frac{\partial P^{(k)}}{\partial x_j}(x) = 2\frac{\partial P^{(k)}}{\partial x_j}(x).$$

Отсюда, применяя формулу Грина, находим

$$-2\int\limits_{|x|\leqslant 1} Q^{(l)}(x)\frac{\partial P^{(k)}}{\partial x_j}(x)\,dx = \tag{3.5}$$

$$= \int\limits_{|x|\leqslant 1} [u(x)(\Delta v)(x) - v(x)(\Delta u)(x)]\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_{n-1}} \left[u(x')\frac{\partial v}{\partial n}(x') - v(x')\frac{\partial u}{\partial n}(x')\right]dx'.$$

Но $\partial P^{(k)}/\partial x_j$ — пространственная гармоника степени $k-1$, так что при $l \neq k-1$ первый интеграл в формуле (3.5) равен 0. Положим $x = rt$, где $r = |x|$; тогда $Q^{(l)}(x) = r^l W^{(l)}(t)$ и $(\partial Q^{(l)}/\partial n)(x) = (\partial/\partial r)(r^l W^{(l)}(t)) = lr^{l-1}W^{(l)}(t) = lW^{(l)}(t)$—производная функции $Q^{(l)}$ в направлении внешней нормали к сфере Σ_{n-1} в точке t. Аналогично, из равенства $u(x) = r^{k+1}t_j Y^{(k)}(t)$ следует, что $(\partial u/\partial n)(t) = (k+1)t_j Y^{(k)}(t)$. Следовательно, если $l \neq k-1$, то

$$0 = l\int\limits_{\Sigma_{n-1}} t_j Y^{(k)}(t)\,W^{(l)}(t)\,dt - (k+1)\int\limits_{\Sigma_{n-1}} t_j Y^{(k)}(t)\,W^{(l)}(t)\,dt.$$

Если теперь предположить еще, что $l \neq k+1$, то

$$\int\limits_{\Sigma_{n-1}} t_j Y^{(k)}(t)\,W^{(l)}(t)\,dt = 0,$$

и лемма доказана.

Поскольку Ω, по предположению, принадлежит $L^2(\Sigma_{n-1})$, сферические гармоники $\{Y^{(k)}\}$ из разложения Ω удовлетворяют оценке $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\|Y^{(k)}\|^2 = \|\Omega\|^2 < \infty$. В силу (3.2), отсюда следует, что

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^n \|Y_0^{(k)}\|^2 = \sum_{k=2}^{\infty} k^n |\gamma_k|^2 \|Y^{(k)}\|^2 < \infty. \tag{3.6}$$

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_0^{(k)}$ — разложение в ряд по сферическим гармоникам сужения функции ω_0 на Σ_{n-1}. (Так как ω_0 есть произведение нечетной функции на четную, она нечетна. Тогда $\int\limits_{\Sigma_{n-1}}\omega_0 = 0$ и раз-

ложение $\sum_{k=1}^{\infty} y_0^{(k)}$ не содержит гармоники нулевой степени.) Из леммы 3.4 и неравенства (3.6) немедленно следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n \| y_0^{(k)} \|^2 < \infty.$$

В силу теоремы 4.7 гл. IV, ω_0 — преобразование Фурье обобщенной функции в смысле главного значения вида $J(x) = \omega(x')/|x|^n$, где функция $\omega \in L^2(\Sigma_{n-1})$ такова, что $\int\limits_{\Sigma_{n-1}} \omega(x')\, dx' = 0$. Действительно, это последнее равенство является следствием нечетности ω (поскольку преобразование Фурье функции J есть нечетная функция). Тогда, согласно теореме 2.6, если $1 < p < \infty$, то существует постоянная A_p, не зависящая от $\varphi \in \mathscr{S}$ и такая, что

$$\| J * \varphi \|_p \leqslant A_p \|\varphi\|_p.$$

Кроме того, поскольку $\varphi \in L^2(E_n)$, используя теорему 3.18 гл. I, видим, что $(J*\varphi)^\wedge(t) = -i(t_j/|t|)\,\Omega_0(t/|t|)\,\hat{\varphi}(t)$. Так как $J*\varphi \in L^p(E_n)$, $1<p<\infty$, то можно опять применить теорему 2.6, найдя при этом, что $[R_j*(J*\varphi)](x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|t|\geqslant\varepsilon} (J*\varphi)(x-t)\,K(t)\,dt$ существует для почти всех $x \in E_n$ и

$$\| R_j*(J*\varphi)\|_p \leqslant B_p \| \varphi \|_p, \tag{3.7}$$

где B_p не зависит от φ. Поскольку, в частности, $J*\varphi \in L^2(E_n)$, то, аппроксимируя $J*\varphi$ функциями из $\mathscr{S}$ и используя еще раз теорему 3.18 гл. I, получим

$$[R_j*(J*\varphi)]^\wedge(t) = -\frac{t_j^2}{|t|^2}\,\Omega_0\left(\frac{t}{|t|}\right)\hat{\varphi}(t).$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^{n} [R_j*(J*\varphi)]^\wedge(t) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{t_j^2}{|t|^2}\,\Omega_0\left(\frac{t}{|t|}\right)\hat{\varphi}(t) =$$

$$= -\Omega_0\left(\frac{t}{|t|}\right)\hat{\varphi}(t) = -(K*\varphi)^\wedge(t).$$

Таким образом, $\sum_{j=1}^{n} R_j*(J*\varphi) = -K*\varphi$, и, в силу оценки (3.7),

$$\| K*\varphi\|_p \leqslant \sum_{j=1}^{n} \| R_j*(J*\varphi)\|_p \leqslant nB_p \|\varphi\|_p.$$

Это неравенство завершает доказательство теоремы, причем $c = c(p, n) = nB_p$.

4. Пространства H^p сопряженных гармонических функций

В конце § 1 гл. III мы ввели пространства векторнозначных функций

$$F(x, y) = (u_1(x, y), \ldots, u_{n+1}(x, y)),$$

определенных во всех точках $(x, y) \in E_{n+1}^+$, где функции u_j, $j = 1, 2, \ldots, n+1$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных (1.6) и неравенствам

$$\int_{E_n} |u_j(x, y)|^p dx \leqslant A < \infty \text{ для всех } y > 0. \tag{4.1}$$

Когда $p > 1$, существование граничных значений $\lim\limits_{y \to 0} u_j(x, y) = u_j(x, 0)$ (почти всюду и по норме) непосредственно следует из теорем 2.5 и 3.16 гл. II и зависит только от условия (4.1). Действительно, последняя теорема утверждает, что некасательные граничные значения существуют почти всюду. Более того, с помощью части (b) теоремы 2.5 можно показать, что это справедливо и при $p = 1$. Если же только потребовать, чтобы гармонические функции удовлетворяли условию (4.1), но не системе (1.6) гл. III, то сходимость по норме может нарушиться. Например, если одна из гармонических функций $u(x, y) = u_j(x, y)$ есть интеграл Пуассона — Стилтьеса δ-меры Дирака μ (т. е. $\mu(A) = 0$, если $0 \notin A \subset E_n$, и $\mu(A) = 1$, если $0 \in A$), то $u(x, y)$ равна ядру Пуассона

$$P(x, y) = c_n \frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{(n+1)/2}}$$

и, следовательно, стремится к 0, когда (x, y) некасательно стремится к $(x_0, 0) = x_0 \in E_n$ при $x_0 \neq 0$. С другой стороны,

$$\lim_{y \to 0} \int_{E_n} |u(x, y) - u(x, 0)|\, dx = \lim_{y \to 0} \int_{E_n} P(x, y)\, dx = 1.$$

Когда $n = 1$, эта ситуация иллюстрирует важное различие между граничным поведением гармонических и аналитических функций. Если u_1 и u_2 — вещественная и мнимая части аналитической в E_2^+ функции, удовлетворяющей оценке (4.1), то рассматриваемые граничные значения существуют для всех $p > 0$ (это есть в точности случай $n = 1$ теоремы 5.1 гл. III). Тот факт, что функции u_1 и u_2 связаны уравнениями Коши — Римана, позволяет доказать существование граничных значений для более широкого диапазона индексов p. Уравнения (1.6) гл. III дают, вероятно, наиболее прямое обобщение уравнений Коши — Римана. Основное свойство, которым обладают такие системы гармонических функций, заключается в том, что существуют индексы $p < 1$, для которых функция $(|u_1|^2 + \ldots + |u_{n+1}|^2)^{p/2}$ субгармоническая (см. теорему 4.14 ниже).

Это обобщает тот факт, что функция $\log |F|$ субгармоническая, если F — аналитическая функция одного комплексного переменного (см. пример (3) в § 4 гл. II). Следующий результат показывает, как это свойство используется для получения интересующих нас граничных значений.

Теорема 4.2. *Пусть $u_1, \ldots, u_k$ — вещественнозначные гармонические функции, определенные в E_{n+1}^+ и такие, что существует положительное $p_0 < 1$, для которого функция*

$$s = (u_1^2 + \cdots + u_k^2)^{p_0/2}$$

субгармоническая. Положим $F = (u_1, \ldots, u_k)$ и предположим еще, что неравенство (4.1) *выполняется для всех $y > 0$ при некотором $p > p_0$. Тогда пределы*

$$u_j(x, 0) = \lim_{(w,y)\to(x,0)} u_j(w, y), \tag{4.3}$$

где (w, y) приближается к $(x, 0)$ некасательным образом, существуют для почти всех $x \in E_n$. При этом

$$\lim_{y\to 0} \int_{E_n} |F(x, y) - F(x, 0)|^p \, dx = \tag{4.4}$$

$$= \lim_{y\to 0} \int_{E_n} \left(\sum_{j=1}^{k} (u_j(x, y) - u_j(x, 0))^2 \right)^{p/2} dx = 0.$$

Доказательство. Положим $q = p/p_0 > 1$. Тогда, в силу (4.1),

$$\int_{E_n} [s(x, y)]^q \, dx = \int_{E_n} |F(x, y)|^p \, dx \leqslant A < \infty$$

для всех $y > 0$. Поскольку, кроме того, s — субгармоническая функция, из теоремы 4.6 гл. II следует, что s имеет наименьшую гармоническую мажоранту m, которая является интегралом Пуассона некоторой функции $f \in L^q(E_n)$. Тогда, в силу теоремы 3.16 гл. II, m имеет некасательные пределы почти во всех точках из E_n. Так как $s \leqslant m$, то функция s некасательно ограничена почти всюду в E_n, причем то же самое справедливо и для $|u_j| \leqslant s^{1/p_0}$, $j = 1, \ldots, k$. Можно, следовательно, применить теорему 3.19 гл. II и убедиться, что существуют некасательные пределы (4.3). Сходимость по норме (4.4) тогда следует из существования этих пределов и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, поскольку функции m и f мажорируются максимальной функцией Харди — Литтлвуда функции f, принадлежащей $L^q(E_n)$ (см. теоремы 3.10 и 3.7 гл. II). Это доказывает теорему.

Когда $p = p_0$ и, следовательно, $q = 1$, все еще имеется наименьшая гармоническая мажоранта m функции s, однако можно гарантировать только, что m — интеграл Пуассона — Стилтьеса конечной

борелевской меры на E_n (см. последнюю часть теоремы 4.6 гл. II). В этом случае нельзя применять теорему о мажорируемой сходимости, как это было сделано выше для вывода сходимости (4.4) из существования некасательных пределов (4.3). С другой стороны, эти некасательные пределы существуют почти всюду, поскольку интеграл Пуассона — Стилтьеса функции m имеет такие пределы [1], и, следовательно, s некасательно ограничена.

Итак, из этой теоремы видно, что содержательное обобщение теории классических пространств H^p получается тогда, когда k компонент вектора F таковы, что существует число $p_0 < 1$, для которого функция $s = |F|^{p_0}$ субгармоническая. Когда $n = 2 = k$, уже отмечалось, что если эти компоненты удовлетворяют уравнениям Коши — Римана, то $|F|^p$ субгармонична для всех $p > 0$ (в действительности $\log|F|$ субгармонична). Естественно, следовательно, рассмотреть задачу о том, какие системы линейных уравнений в частных производных первого порядка с постоянными коэффициентами обладают тем свойством, что их решения $F = (u_1, \ldots, u_k)$ гармоничны и удовлетворяют указанному условию субгармоничности. Любая такая система уравнений в частных производных записывается в виде

$$\sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, \tag{4.5}$$

где A_j есть $(l \times k)$-матрица из чисел и $\partial F/\partial x_j$ — вектор (столбец) с компонентами $\partial u_i/\partial x_j$, $i = 1, \ldots, k$ [2].

Будем называть такие системы уравнений *обобщенными системами Коши — Римана* (ОКР), если каждое решение $F = (u_1, \ldots, u_k)$ имеет гармонические компоненты u_i, $i = 1, \ldots, k$. Такое решение назовем системой *сопряженных гармонических функций*. Ниже мы покажем, что при $n = 2 = k = l$ такая система линейной заменой переменных сводится к обычным уравнениям Коши — Римана. Однако сначала сделаем несколько общих замечаний.

---

[1] Если m — интеграл Пуассона — Стилтьеса конечной борелевской меры μ и $M_\mu(x) = \sup\limits_{S_x} (1/|S_x|) \int\limits_{S_x} d\mu(t)$ — максимальная функция, то легко проверить, что рассуждения из § 3 гл. II можно использовать для доказательства сходимости почти всюду функции m, если соответствующим образом изменить их, введя M_μ.

[2] Когда мы впервые ввели систему F, удовлетворяющую уравнениям (1.6), предполагалось, что она является функцией $n+1$ переменных $(x_1, \ldots, x_n, y)$, где $y > 0$ и $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка в E_n. Переменная y играет особую роль, как это видно из неравенства (4.1), которое, очевидно, необходимо для обобщения понятия пространств H^p. С другой стороны, свойство субгармоничности $|F|^p$ для некоторого $p > 0$ не требует такой выделенной переменной. Именно по этой причине мы вводим эти системы для функций, определенных в некоторой области в E_n, и не делаем различий между переменными.

Будем говорить, что система (4.5) *эллиптическая,* если равенство

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j v = 0 \tag{4.6}$$

выполняется для некоторых k-мерного вектора (столбца) v и n-мерной строки $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ только в том случае, когда либо v, либо λ равна 0. Каждая система ОКР эллиптическая. Если бы это было не так, то существовали бы ненулевые v и λ, удовлетворяющие равенству (4.6). Но тогда $F(x) = \{\exp \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\} v$ будет негармоническим решением системы (4.5); отсюда следует, что (4.5) не может быть системой ОКР.

Если рассматриваемая система эллиптическая и $\lambda \neq 0$, то отображение $v \to (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j) v$ k-мерного евклидова пространства в l-мерное евклидово пространство, очевидно, должно быть взаимно однозначным (иначе ненулевой вектор можно было бы отобразить в нулевой, что противоречит эллиптичности). Отсюда следует, что $l \geqslant k$. Выбрав λ таким образом, чтобы $\lambda_j = 1$ и $\lambda_i = 0$ при $i \neq j$, видим, что каждая из матриц A_j, $j = 1, \ldots, n$, задает взаимно однозначное отображение. В частности, при $k = l$ матрицы должны быть обратимыми. Если, кроме того, $n = 2 = k$, то система (4.5) эквивалентна системе вида

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + A \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \tag{4.7}$$

где A — невырожденная матрица (поскольку в этом случае можно умножить обе части равенства (4.5) на A_1^{-1}). Предположим теперь, что (4.7) есть система ОКР. Тогда из гармоничности F следует, что

$$(A + A^{-1}) \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \tag{4.8}$$

для всякого решения F. Но для произвольного двумерного вектора b всегда существует решение системы (4.7), такое, что $\partial^2 F / \partial x_1 \partial x_2 \equiv b$. Действительно, $F(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 b - (x_1^2 A b + x_2^2 A^{-1} b)$ — такое решение. Так как должно выполняться (4.8), то отсюда следует, что $A + A^{-1} = 0$, или, эквивалентно, $A^2 = -I$. Но из этого уравнения следует, что матрица A должна иметь вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

где $a^2+bc=-1$. Из последнего уравнения следует, что $bc<0$, поэтому матрица

$$Q=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & c\end{pmatrix}$$

имеет обратную и удовлетворяет равенству

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Итак, если определить G равенством

$$\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=G=Q^{-1}F=Q^{-1}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},$$

то уравнение (4.7) запишется в виде

$$\frac{\partial G}{\partial x_1}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial G}{\partial x_2}=Q^{-1}\left[\frac{\partial F}{\partial x_1}+A\frac{\partial F}{\partial x_2}\right]=0.$$

Но это и есть классические уравнения Коши — Римана для v_1 и v_2.

Введем теперь функциональное пространство, ассоциированное с произвольной фиксированной обобщенной системой Коши — Римана. Если $p>0$ и $F=(u_1, \ldots, u_k)$ — решение этой системы в области E_{n+1}^{+}, то будем говорить, что F принадлежит $\mathbf{H}^p(E_{n+1}^{+})$, если существует постоянная $A<\infty$, такая, что

$$\int_{E_n}|F(x, y)|^p dx=\int_{E_n}(|u_1(x, y)|^2+\cdots+|u_k(x, y)|^2)^{p/2}dx\leqslant A$$

для всех $y>0$. Ввиду сделанных выше замечаний очевидно, что пространства $\mathbf{H}^p(E_{n+1}^{+})$ обобщают классические H^p-пространства аналитических в верхней полуплоскости функций. Следующий результат вместе с теоремой 4.2 показывает, что это определение позволяет построить содержательную теорию этих пространств для индексов $p<1$.

Теорема 4.9. *Пусть F — решение обобщенной системы Коши — Римана*

$$\sum_{j=1}^{n}A_j\frac{\partial F}{\partial x_j}=0;$$

тогда $|F|^p$ — субгармоническая функция для $p\geqslant 2-(1/\alpha)$, где α — некоторое положительное число, меньшее 1 и зависящее только от матриц $A_1, \ldots, A_n$.

Доказательство. В силу теоремы 4.4 гл. II, достаточно показать, что $s=|F|^p$ имеет неотрицательный лапласиан на мно-

жестве всех x из области определения F, таких, что $s(x) > 0$. Поскольку F имеет гармонические компоненты, на этом множестве

$$\Delta s = p\,|F|^{p-2}\left\{(p-2)\,|F|^{-2}\sum_{j=1}^{n}(F\cdot F_j)^2+\sum_{j=1}^{n}|F_j|^2\right\},$$

где $F_j = \partial F/\partial x_j$ и $F\cdot F_j=\sum_{i=1}^{k} u_i\,(\partial u_i/\partial x_j)$. Таким образом, условие $\Delta s \geqslant 0$ эквивалентно неравенству

$$\sum_{j=1}^{n}(F\cdot F_j)^2 \leqslant \frac{1}{2-p}\,|F|^2\sum_{j=1}^{n}|F_j|^2 \text{ [1]}. \tag{4.10}$$

Если существует положительное $\alpha < 1$, зависящее только от $A_1, \ldots, A_n$ и такое, что

$$\max_{|v|=1}\sum_{j=1}^{n}(u^{(j)}\cdot v)^2 \leqslant \alpha\sum_{j=1}^{n}|u^{(j)}|^2, \tag{4.11}$$

где $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$ суть k-строки, удовлетворяющие равенству

$$\sum_{j=1}^{n}A_j u^{(j)} = 0, \tag{4.12}$$

то неравенство (4.10) несомненно будет выполняться. Поэтому докажем это предположение. При этом, очевидно, можно считать, что $\sum_{j=1}^{n}|u^{(j)}|^2=1$. Если числа $\alpha<1$, для которого справедливо неравенство (4.11), не существует, то, в силу компактности, найдутся v и $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$, удовлетворяющие равенству (4.12) и такие, что $|v|^2 = 1 = \sum_{j=1}^{n}|u^{(j)}|^2$ и $\sum_{j=1}^{n}(u^{(j)}\cdot v)^2 = 1$. Но, в силу неравенства Коши — Шварца,

$$\sum_{j=1}^{n}(u^{(j)}\cdot v)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n}|u^{(j)}|^2\,|v|^2=\sum_{j=1}^{n}|u^{(j)}|^2 = 1.$$

Отсюда, поскольку $(u^{(j)}\cdot v)^2 \leqslant |u^{(j)}|^2\,|v|^2$, следует, что $(u^{(j)}\cdot v)^2 = |u^{(j)}|^2\,|v|^2$ для $j = 1, \ldots, n$. Таким образом, в неравенстве Коши — Шварца имеет место равенство, а значит, существует такое $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, что $u^{(j)} = \lambda_j v$. Но это противоречит условию эллиптичности (4.6), поскольку в этом случае

$$0=\sum_{j=1}^{n}A_j u^{(j)}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j A_j v,$$

---

[1] При выводе (4.10) мы предполагаем, что $p < 2$, но при $p \geqslant 2$ равенство $\Delta s = 0$ очевидно.

где $|\lambda|^2 = (\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2) = 1 = |v|^2$. Следовательно, искомое число α существует и теорема доказана.

Наименьшее число α, для которого справедлива теорема 4.9, очевидно, зависит от системы ОКР, которой удовлетворяет F. Во многих важных случаях это число можно найти. Например, для *системы М. Рисса* уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0, \tag{4.13}$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j,$$

введенной в гл. III (см. (1.6)), $\alpha = (n-1)/n$. Точнее, справедлива следующая

Теорема 4.14. *Пусть $F = (u_1, \ldots, u_n)$ — решение системы М. Рисса* (4.13); *тогда $|F|^p$ — субгармоническая функция при $p \geqslant (n-2)/(n-1)$. При $0 < p < (n-2)/(n-1)$ существует решение F, для которого $|F|^p$ не является субгармонической функцией.*

Доказательство. Из доказательства теоремы 4.9 видно, что достаточно найти наименьшее α, удовлетворяющее неравенству (4.11) для всех n-строк $u^{(j)} = (u_{j1}, \ldots, u_{jn})$, $j = 1, \ldots, n$, таких, что

$$\sum_{j=1}^{n} u_{jj} = 0 \text{ и } u_{ij} = u_{ji}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j.$$

Пусть $\mathcal{M}$ есть $(n \times n)$-матрица с элементами u_{ij}; тогда последние условия эквивалентны тому, что $\mathcal{M}$ симметрична и ее след равен 0. Неравенство (4.11) можно переписать в виде

$$\max_{|v|=1} |\mathcal{M}v|^2 \leqslant \alpha \, |||\mathcal{M}|||^2, \tag{4.15}$$

где $|||\mathcal{M}||| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} u_{ij}^2\right)^{1/2}$ — *норма Гильберта — Шмидта* матрицы $\mathcal{M}$. Левая часть неравенства (4.15) равна, конечно, квадрату нормы оператора на E_n, переводящего v в $\mathcal{M}v$. Но из элементарной линейной алгебры известно, что если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы $\mathcal{M}$ (которые все вещественны, так как $\mathcal{M}$ симметрична), то эта операторная норма $\|\mathcal{M}\| = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}$, в то время как $|||\mathcal{M}||| = (\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2)^{1/2}$. Поскольку след $\mathcal{M}$ равен нулю, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 0$. Тогда, если, скажем, $|\lambda_j| = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}$, то

$$\|\mathcal{M}\|^2 = |\lambda_j|^2 = \left|-\sum_{i \neq j} \lambda_i\right|^2 \leqslant (n-1) \sum_{i \neq j} \lambda_i^2.$$

Прибавляя $(n-1)\,|\lambda_j|^2$ к обеим частям этого неравенства, получим

$$n\,\|\mathcal{M}\|^2 = n\,|\lambda_j|^2 \leqslant (n-1)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 = (n-1)\,|||\mathcal{M}|||^2,$$

и неравенство (4.15) доказано для $\alpha = (n-1)/n$. Из теоремы 4.9 тогда следует, что $|F|^p$ — субгармоническая функция для $p \geqslant 2-(1/\alpha) = (n-2)/(n-1)$, если F — решение системы М. Рисса.

Чтобы показать, что в общем случае $|F|^p$ не будет субгармонической функцией для показателей p, меньших $(n-2)/(n-1)$, положим F равной градиенту функции $h(x) = |x|^{(2-n)}/(2-n)$. Тогда простые вычисления показывают, что

$$(4.16)\quad \Delta(|F|^p) = \Delta(|\nabla h|^p) = \\ = p(n-1)\{p(n-1)-(n-2)\}\,|x|^{p(n-1)-2}.$$

Следовательно, $\Delta(|F|^p) < 0$, если $p < (n-2)/(n-1)$. В силу теоремы 4.4 гл. II, функция $-|F|^p$ субгармонична в $E_n \setminus \{0\}$. Тогда $-|F|^p$ удовлетворяет неравенству среднего значения (4.2) из указанной главы. Если бы $|F|^p$ также была субгармонической, она тоже удовлетворяла бы этому неравенству среднего значения и, следовательно, обладала бы свойством среднего значения. Тогда, в силу теоремы 1.7 гл. II, $|F|^p$ была бы гармонической, но, согласно равенству (4.16), этого не может быть при таких значениях индекса p.

Большой класс систем сопряженных гармонических функций, удовлетворяющих уравнениям М. Рисса (4.13), можно получить следующим образом. Пусть $f \in L^p(E_n)$, $1 < p < \infty$; рассмотрим интеграл Пуассона

$$u(x, y) = c_n \int_{E_n} f(t)\,\frac{y}{(|x-t|^2+y^2)^{(n+1)/2}}\,dt$$

и свертки

$$v_j(x, y) = c_n \int_{E_n} f(t)\,\frac{(x_j-t_j)}{(|x-t|^2+y^2)^{(n+1)/2}}\,dt,$$

$j = 1, \ldots, n$, $x \in E_n$ и $y > 0$. Вычисляя необходимые частные производные, легко проверить, что $F = (u, V) = (u, v_1, \ldots, v_n)$ — система М. Рисса, определенная в E_{n+1}^+. Если $n = 1$, то $v = v_1$ — функция, которая была использована для определения преобразования Гильберта $\tilde{f}$ функции f (см. § 1). Перечислим некоторые основные свойства функций v и $\tilde{f}$ (они легко выводятся из определений):

$F = u + iv$ аналитична в E_2^+ и $\sup\limits_{y>0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^p\,dx < \infty$; значит, $F \in H^p(E_2^+)$. Следовательно, $f + i\tilde{f}$ почти всюду равна некасательному пределу функции F, а также пределу F по L^p-норме (т. е.

$$\lim_{y\to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(x, y) + iv(x, y) - f(x) - i\tilde{f}(x)|^p\,dx = 0).$$

Эти свойства, так же как и ряд других результатов, полученных в § 1, легко обобщаются на n измерений, и в этом смысле преобразования М. Рисса можно рассматривать как наиболее естественное обобщение преобразования Гильберта в классе сингулярных интегральных операторов. В заключение этого параграфа мы покажем, как получаются некоторые из этих обобщений на высшие размерности.

Теорема 4.17. *Пусть* $f \in L^p(E_n)$, $1 < p < \infty$, $\tilde{f}_j = R_j f$, $j = 1, \ldots, n$, — *преобразования М. Рисса функции* f $u(x, y)$ — *интеграл Пуассона функции* f *и* $v_j(x, y)$ — *свертки* f *с ядрами* $c_n t_j/(|t|^2 + y^2)^{(n+1)/2}$. *Тогда:*

(i) *функция* $F(u, v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{H}^p(E_{n+1}^+)$;

(ii) $$\int\limits_{E_n} f(x-t)\frac{t_j}{(|t|^2+y^2)^{(n+1)/2}}\,dt = \int\limits_{E_n} \tilde{f}_j(x-t)\frac{y}{(|t|^2+y^2)^{(n+1)/2}}\,dt$$

для $j = 1, \ldots, n$;

(iii) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{E_n} f(x-t)\frac{t_j}{(|t|^2+\varepsilon^2)^{(n+1)/2}}\,dt - \int\limits_{0<\varepsilon\leqslant|t|} f(x-t)\frac{t_j}{|t|^{n+1}}\,dt\right\} = 0$$

во всех точках лебегова множества функции f;

(iv) $\left(\int\limits_{E_n} \{\sup\limits_{y>0} |v_j(x, y)|\}^p dx\right)^{1/p} \leqslant A\|f\|_p$, *где* A — *постоянная, зависящая только от размерности* n *и индекса* p.

Доказательство. Все эти утверждения являются простыми следствиями уже установленных теорем или получаются очевидными изменениями доказательства соответствующих одномер-

ных результатов. Например, для доказательства (iii) можно использовать те же самые рассуждения, что и для доказательства леммы 1.2. Вместо функции, определенной равенством (1.3), введем функцию

$$\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{t_j}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}}-\dfrac{t_j}{|t|^{n+1}} & \text{при } |t|\geqslant 1,\\[2ex] \dfrac{t_j}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}} & \text{при } |t|<1\end{cases}$$

и для $\varepsilon>0$ обозначим $\varphi_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-n}\varphi(1/\varepsilon)$. Тогда выражение в скобках в равенстве (iii) примет вид $\int\limits_{E_n} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)\,dt$. Из неравенства

$$\psi(x)=\sup_{|t|\geqslant|x|}|\varphi(t)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{\text{const}}{|x|^n(1+|x|^2)} & \text{при } |x|\geqslant 1,\\[2ex] \text{const} & \text{при } |x|<1\end{cases}$$

следует, что $\psi\in L^1(E_n)$, а это позволяет применить теорему 1.25 гл. I и получить, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{E_n} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)\,dt=f(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,dt=0;$$

тем самым равенство (iii) доказано.

Если $\varepsilon>0$, то мы утверждаем, что

(4.18) $$\frac{x_j}{(|x|^2+(y+\varepsilon)^2)^{(n+1)/2}}=$$
$$=c_n\int\limits_{E_n}\frac{y}{(|x-t|^2+y^2)^{(n+1)/2}}\,\frac{t_j}{(|t|^2+\varepsilon^2)^{(n+1)/2}}\,dt$$

для $(x, y)\in E_{n+1}^+$. Это равенство доказывается прямым применением леммы 2.7 гл. II с

$$u(x, y)=\frac{x_j}{(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}},$$

$y_2=y$ и $y_1=\varepsilon$.

Теперь из равенства (4.18) немедленно следует, что j-е преобразование М. Рисса функции P_y со значениями

$$P_y(x)=c_n\frac{y}{(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}}$$

(т. е. ядра Пуассона) есть j-е *сопряженное ядро Пуассона*

$$Q_y^{(j)}(x)=c_n\frac{x_j}{(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}}.$$

Свойство (ii) теперь легко следует отсюда, поскольку преобразования Фурье обеих частей равенства должны равняться функции со значениями

$$-ie^{-2\pi|x|y}\hat{f}(x)\frac{x_j}{|x|}, \quad x \in E_n$$

(см. теорему 1.14 гл. I и (2.7) в этой главе). Свойство (i) следует из (ii), неравенства (2.2) гл. II и теоремы 2.6. Из этой последней теоремы, равенства (ii) и теорем 3.10 и 3.7 гл. II получаем (iv).

5. Дальнейшие результаты

5.1. В классической теории рядов Фурье аналогом преобразования Гильберта является *сопряженная функция* функции f, определенной на единичной окружности $\{z \in \mathbf{C};\ |z| = 1\}$. Как и в случае преобразования Гильберта, сопряженную функцию $\tilde{f}$ функции f можно определить методами теории функций комплексного переменного или чисто вещественными методами. Если считать f вещественнозначной интегрируемой функцией переменной $\theta \in [0, 2\pi]$ и для $0 < r < 1$ ввести следующее обозначение *сопряженного ядра Пуассона:*

$$Q(r, \theta) = \frac{1}{\pi}\,\frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2},$$

то функция

$$v(z) = v(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \varphi)\,Q(r, \varphi)\,d\varphi$$

будет сопряженной гармонической функцией к интегралу Пуассона

$$u(z) = u(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \varphi)\,P(r, \varphi)\,d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \varphi)\,\frac{1}{2\pi}\,\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}\,d\varphi.$$

Это означает, что функция $F(z) = u(z) + iv(z)$ аналитична внутри единичного круга $\{z \in \mathbf{C};\ |z| < 1\}$. Произведя простые изменения в доказательстве леммы 2.6 гл. V, можно показать, что $F(z)$ имеет предел, когда z некасательно приближается к граничной точке $e^{i\theta}$, для почти всех $\theta \in [0, 2\pi]$ (подробнее см. в книге Зигмунда [1], гл. VII). Следовательно, мнимая часть функции F также почти всюду имеет некасательные граничные значения. Функция f^c, принимающая эти значения, и есть сопряженная функция функции f.

Таким образом, f^c почти всюду определяется равенством

$$f^c(\theta) = \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \varphi)\, Q(r, \varphi)\, d\varphi.$$

Простое изменение доказательства леммы 1.2 показывает, что f^c можно также почти всюду определить равенством

$$f^c(\theta) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{0<\varepsilon\leqslant|\varphi|\leqslant\pi} f(\theta-\varphi)\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}\, d\varphi.$$

Если функция f принадлежит $L^2(0, 2\pi)$ и ее ряд Фурье есть $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}$, то рассуждения, аналогичные использованным для доказательства (2.7) в гл. V, показывают, что f^c также принадлежит $L^2(0, 2\pi)$, ее ряд Фурье имеет вид $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (-i\operatorname{sgn} k)\, c_k e^{ik\theta}$ и, следовательно, $\|f^c\|_2 \leqslant \|f\|_2$. Поэтому естественно ожидать, что для сопряженной функции справедливо неравенство, аналогичное неравенству (2.11) из гл. V. В действительности можно показать, что $f \to f^c$ есть отображение слабого типа $(1, 1)$, а тогда из интерполяционной теоремы Марцинкевича следует неравенство $\|f^c\|_p \leqslant \leqslant A_p \|f\|_p$ для $1 < p < \infty$, где A_p зависит от p, но не от $f \in \in L^p(0, 2\pi)$. В силу теоремы 3.15 гл. V, однако, достаточно показать, что это отображение условного слабого типа $(1, 1)$. Это очень просто установить следующими рассуждениями.

Пусть E — измеримое подмножество отрезка $[0, 2\pi]$ и χ_E — его характеристическая функция. Если $u(z)$ и $v(z)$ — интеграл Пуассона и сопряженный интеграл Пуассона функции χ_E, то функция $F(z) = u(z) + iv(z)$ аналитична при $|z| < 1$. Тогда для каждого вещественного числа y функция $\exp\{yF(z)\}$ аналитична при $|z| < < 1$ и, в силу теоремы о среднем,

$$e^{y|E|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\{yF(re^{i\theta})\}\, d\theta$$

для $0 \leqslant r < 1$. Устремляя r к 1 и применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получим

$$\int_0^{2\pi} \exp\{y[\chi_E(\theta) + i\chi_E^c(\theta)]\}\, d\theta = e^{y|E|}$$

для всех вещественных чисел y. Введя обозначение $E' = [0, 2\pi] \setminus E$, можно записать это равенство в виде

$$e^{y|E|} = e^y \int_E \exp\{iy\chi_E^c(\theta)\}\, d\theta + \int_{E'} \exp\{iy\chi_E^c(\theta)\}\, d\theta.$$

Взяв комплексные сопряженные обеих частей равенства и заменив y на $-y$, получим

$$e^{-y|E|} = e^{-y} \int\limits_{E} \exp\{iy\chi_E^c(\theta)\}\, d\theta + \int\limits_{E'} \exp\{iy\chi_E^c(\theta)\}\, d\theta$$

для всех вещественных чисел y. Найдя из этих двух уравнений $\int\limits_{E} \exp\{iy\chi_E^c(\theta)\}\, d\theta$ и $\int\limits_{E'} \exp\{iy\chi_E^c(\theta)\}\, d\theta$, видим, что $\int\limits_0^{2\pi} \exp\{iy\chi_E^c(\theta)\} d\theta$ зависит только от y и $|E|$. Положим $\eta(s) = |\{\theta \in [0, 2\pi];\ \chi_E^c(\theta) > s\}|$ и $\nu(s) = |\{\theta \in [0, 2\pi];\ \chi_E^c(\theta) < s\}|$; тогда интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iys} d\eta(s) \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iys} d\nu(s)$$

полностью определяются величинами y и $|E|$. Поскольку меры вполне определяются своими преобразованиями Фурье, то η и ν зависят только от $|E|$. Так как $\lambda(s) = |\{\theta; |\chi_E^c(\theta)| > s > 0\}| = \eta(s) + \nu(-s)$, функция распределения λ функции χ_E^c (см. § 2 гл. V) также зависит только от $|E|$. Если обозначить через χ характеристическую функцию интервала $[0, |E|]$, то сопряженная функция χ_E^c и ее функция распределения особенно просто вычисляются, причем

$$e^{i\lambda(s)/2} = \frac{\operatorname{sh} \pi s + i \sin(|E|/2)}{\operatorname{sh} \pi s - i \sin(|E|/2)}.$$

Отсюда легко выводится, что оператор сопряженной функции имеет условный слабый тип (1, 1).

5.2. Если λ — функция распределения преобразования Гильберта характеристической функции множества $E \subset (-\infty, \infty)$ конечной меры, то можно показать, что

$$\lambda(s) = 2|E| / \operatorname{sh} \pi s$$

для $s > 0$. Отсюда, конечно, также следует, что преобразование Гильберта имеет условный слабый тип (1, 1). Доказательство этого утверждения, так же как и другое доказательство функционального соотношения, приведенного в конце п. 5.1, см. в работе Стейна и Г. Вейса [2]. Еще одно доказательство последней формулы для $\lambda(s)$ см. в работе Кальдерона [1].

5.3. Равенство из п. 5.2 можно переписать при помощи невозрастающей перестановки преобразования Гильберта $\tilde{\chi}_E$ функции

χ_E в следующем виде:

$$\tilde{\chi}_E^*(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Ar\,sh}(2\,|E|/t).$$

Если

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int\limits_{R>|t|>\varepsilon} \frac{\Omega(t)}{|t|^n} f(x-t)\,dt$$

— сингулярный интегральный оператор описанного в § 2 типа, то можно следующим образом обобщить приведенное выше соотношение. Пусть E — измеримое подмножество конечной меры из E_n, χ_E — его характеристическая функция и $m(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \tilde{\chi}_E^*(s)\,ds$ (см. § 3 гл. V); тогда

$$tm(t) \leqslant \frac{\|\Omega\|}{2} \int\limits_0^t \operatorname{Ar\,sh}(2\,|E|/s)\,ds,$$

где $\|\Omega\| = \int\limits_{\Sigma_{n-1}} |\Omega(x')|\,dx'$ (см. О'Нейл и Вейс [1]). Этот результат вместе с интерполяционной теоремой 3.15 гл. V дает другое доказательство того, что $f \to \tilde{f}$ — ограниченный оператор на $L^p(E_n)$ (теорема 2.6).

5.4. Мы отмечали в § 3, что если ядро $K(t) = \Omega(t)/|t|^n$ четно, то для получения ограниченного сингулярного оператора на $L^p(E_n)$, $1 < p < \infty$, необходимо, кроме интегрируемости Ω на Σ_{n-1}, наложить на Ω некоторые дополнительные ограничения (хотя интегрируемости достаточно в случае нечетного ядра). Действительно, мы предполагали, что Ω квадратично-интегрируема, и это позволило использовать (сравнительно) простые рассуждения, приведенные в § 3. Можно показать, однако, что теорема 3.1 останется справедливой, если заменить условие квадратичной интегрируемости Ω менее ограничительным условием

$$(*) \qquad \int\limits_{\Sigma_{n-1}} |\Omega(x')\log^+|\Omega(x')||\,dx' < \infty,$$

где $\log^+ s = \log s$ для $s \geqslant 1$ и $\log^+ s = 0$ для $0 < s < 1$ (см. Кальдерон и Зигмунд [4]).

5.5. Теорема 3.1 менее общая, чем теорема 2.6, еще и в другом смысле. В то время как последняя утверждает, что рассматриваемый оператор определен (почти всюду) для всех $f \in L^p(E_n)$, в теореме 3.1 область определения оператора сужена на $\mathscr{S}$. Когда $\varphi \in \mathscr{S}$,

интеграл

$$\int\limits_{|t|\geqslant\varepsilon} \varphi(x-t)\frac{\Omega(t)}{|t|^n}\,dt$$

определен и вопросы, поставленные в подстрочном примечании вслед за определением (1.8), не возникают. Однако не обязательно ограничиваться рассмотрением пространства $\mathscr{S}$, поскольку можно показать, что интеграл

$$\int\limits_{|t|\geqslant\varepsilon>0} f(x-t)\frac{\Omega(t)}{|t|^n}\,dt$$

абсолютно сходится для почти всех x, предел при $\varepsilon\to 0$ существует в среднем порядка p, $1<p<\infty$, и поточечно почти всюду для всех $f\in L^p(E_n)$, даже когда функция Ω удовлетворяет более слабому условию (*) из п. 5.4 (см. Кальдерон и Зигмунд [4]).

5.6. Простые рассуждения показывают, что преобразования Рисса $R_1, \ldots, R_n$ обладают следующими свойствами:

(1) каждое R_j коммутирует со сдвигами;

(2) каждое R_j коммутирует с растяжениями;

(3) если ρ — вращение с матрицей (ρ_{jk}) и T_ρ — оператор на функциях f, определенных на E_n, действующий по правилу $(T_\rho f)(x)=f(\rho x)$, то

$$T_{\rho^{-1}}R_jT_\rho=\sum_{k=1}^{n}\rho_{jk}R_k.$$

Кроме того, в силу теоремы 2.6,

(4) каждое R_j непрерывно отображает $L^2(E_n)$ в себя.

Когда $n\geqslant 3$, эти четыре свойства полностью характеризуют преобразования Рисса. Точнее, если $R_1, \ldots, R_n$ — операторы на $L^2(E_n)$, обладающие свойствами (1), (2), (3) и (4), то они с точностью до фиксированного постоянного множителя совпадают с преобразованиями Рисса. Приведем схему доказательства этого утверждения. Вспоминая теоремы 3.16 и 3.18 гл. I, видим, что из свойств (1) и (4) следует, что сужение каждого R_j на $\mathscr{S}$ есть сверточный оператор вида $R_j\varphi=u_j*\varphi$, $\varphi\in\mathscr{S}$, где u_j — обобщенная функция, преобразование Фурье которой $\hat{u}_j=b_j$ есть ограниченная функция. Из свойства (2) и из (1.6) гл. I следует, что каждая функция b_j однородна степени 0. Наконец, из свойства (3) и из того, что операторы T_ρ коммутируют с преобразованием Фурье (теорема 1.1 гл. IV), следует, что

$$b_j(\rho^{-1}x)=\sum_{k=1}^{n}\rho_{kj}b_k(x)$$

для всех вращений ρ и $x\in E_n$. Фиксируя $x\in E_n$, $x\neq 0$, и заставляя ρ пробегать все вращения, видим, что b_j полностью опре-

деляется величинами $(b_1(x), \ldots, b_n(x)) = b(x)$ (мы, конечно, используем тот факт, что b_j однородны степени 0). Если y — произвольная точка из E_n, такая, что $|y| = |x|$, то существует вращение σ, такое, что $y = \sigma^{-1}x$. Тогда для любого вращения ρ, оставляющего точку x неподвижной, имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} \rho_{lj}\sigma_{kl}\right) b_k(x) = b_j(\sigma^{-1}\rho^{-1}x) = b_j(\sigma^{-1}x) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} b_k(x).$$

Таким образом, вектор $b = b(x)$ обладает тем свойством, что $\sigma\rho b = \sigma b$ для всех вращений ρ, оставляющих точку x неподвижной. Но это означает, что $b(x)$ должен быть пропорциональным x. Отсюда и из равенства (2.7), очевидно, следует, что $R_1, \ldots, R_n$ с точностью до постоянной равны преобразованиям Рисса. Когда $n = 2$, эти рассуждения становятся неверными, поскольку из того, что $\rho b = b$ для всех вращений, оставляющих точку x неподвижной, не следует, что $b(x)$ пропорционален x (вращение в E_2, оставляющее неподвижной какую-либо точку x, $x \neq 0$, совпадает с тождественным преобразованием). Однако, заменив группу вращений ортогональной группой, получим характеристику преобразований Рисса, справедливую и при $n = 2$.

5.7. Сингулярные интегральные операторы являются важным инструментом в теории уравнений в частных производных. Например, преобразования Рисса можно использовать для получения оценок для оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Поскольку преобразования Фурье выражений $\partial^2\varphi/\partial x_j \partial x_k$ и $-R_jR_k\Delta\varphi$ для $\varphi \in S$ совпадают (это следует из формулы (2.7) этой главы и теоремы 1.8 гл. I), справедливо соотношение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_k} = - R_jR_k\Delta\varphi.$$

Отсюда, в силу теоремы 2.6,

$$\left\| \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_p \leqslant A_p \|\Delta\varphi\|_p,$$

$1 < p < \infty$, и A_p не зависит от $\varphi \in \mathscr{S}$. Обобщения этих оценок см. в книге Стейна [3], гл. III и IV.

5.8. Если φ — основная функция, то ее преобразование Рисса $R_k\varphi$ — ограниченная непрерывная функция. Это следует из того, что интегрирование по частям позволяет представить $R_k\varphi$ в виде свертки основной функции $\partial\varphi/\partial x_k$ с функцией $c_n(1-n)/|x|^{n-1}$. Итак, если μ — конечная борелевская мера на E_n, то интеграл

$\int\limits_{E_n} (R_k\varphi)\, d\mu$ существует и его можно использовать для определения *преобразования Рисса* ν_k меры μ, $k = 1, \ldots, n$, как такой «меры», что

$$\int\limits_{E_n} \varphi d\nu_k = -\int\limits_{E_n} (R_k\varphi)\, d\mu$$

для всех основных функций φ. Это равенство определяет преобразование Рисса меры μ как обобщенную функцию медленного роста, причем в общем случае ν_k, $k = 1, \ldots, n$, не является конечной борелевской мерой. Действительно, используя теорию $\mathbf{H}^p$-пространств, развитую § 4, можно доказать следующее обобщение классической теоремы Ф. и М. Риссов:

Если преобразования Рисса $\nu_1, \ldots, \nu_n$ конечной борелевской меры μ также являются конечными борелевскими мерами, то меры μ, $\nu_1, \ldots, \nu_n$ все абсолютно непрерывны по отношению к лебеговой мере (см. Стейн и Г. Вейс [1]; обобщение этого результата можно найти в книге Стейна [3], гл. VII).

5.9. Систему М. Рисса (введенную в § 4) можно реализовать в виде градиента гармонической функции $\nabla h = F = (u_1, \ldots, u_n)$, когда область определения системы F односвязна. Действительно, вторая совокупность уравнений (4.13) есть в точности условия существования функции h, градиент которой равен F, в то время как из первого уравнения следует, что лапласиан функции h равен 0. Рассмотрев градиент $\nabla u_j = (u_{j1}, \ldots, u_{jn})$ каждой из компонент u_j, $j = 1, \ldots, n$, мы получим n^2-строку $F^{(2)} = (u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{nn})$, которую будем называть *вторым градиентом* функции h. Можно повторить эту операцию еще раз и получить *третий градиент* функции h. Продолжая подобным образом, получим *k-й градиент* $F^{(k)}$ функции h. Кальдерон и Зигмунд [6] показали, что $|F^{(k)}|^p$ — субгармоническая функция для $p \geqslant (n-2)/(k+n-2)$. Таким образом, рассматривая $\mathbf{H}^p$-пространства систем гармонических в E^+_{n+1} функций, являющихся k-ми градиентами, получим утверждения (2.4) и (2.5) о граничных значениях при индексах $p \geqslant (n-1)/(k+n-1)$ (заметим, что размерность области определения равна $n+1$). Тем самым мы получим теорию $\mathbf{H}^p$-пространств для индексов p, сколь угодно близких к 0.

Существует класс обобщенных уравнений Коши — Римана, тесно связанный с неприводимыми представлениями ортогональной группы $SO(n)$; k-е градиенты можно реализовать в виде решений системы ОКР из этого класса. Детали можно найти в работе Стейна и Г. Вейса [4].

5.10. Теория сингулярных интегралов, рассмотренная в этой главе, связана с ядрами вида $K(x) = \Omega(x)/|x|^n$, где Ω — од-

нородная функция, удовлетворяющая определенным условиям интегрируемости на единичной сфере Σ_{n-1}, и, в частности, $\int\limits_{\Sigma_{n-1}} \Omega(x')\,dx' = 0$. Такие ядра первоначально изучались Кальдероном и Зигмундом [3]. Котлар [1] и Хёрмандер [1] указали, что их теория применима без значительных изменений и к более общим ядрам K. Наиболее общий класс состоит из обобщенных функций K, задаваемых локально интегрируемыми вне начала координат функциями и таких, что (1) $\hat{K}(x)$ ограничена (где $\hat{K}$ — преобразование Фурье в смысле обобщенных функций медленного роста) и

$$\int\limits_{|x|\geqslant 2|y|} |K(x-y)-K(x)|\,dx \leqslant A < \infty \tag{2}$$

для всех $y \in E_n$ (см. Стейн [3], гл. II).

Преимущество подобного подхода заключается в том, что он дает результаты и для $L^1(E_n)$ и, в частности, приводит к обобщению утверждения (см. лемму 2.8 гл. V) о том, что преобразование Гильберта имеет слабый тип (1, 1).

Библиографические замечания

Для дальнейшего изучения преобразования Гильберта см. Титчмарш [2], Зигмунд [1] и Люмис [1]. Метод вращений, обсуждаемый в § 2, впервые был разработан Кальдероном и Зигмундом [4]. Дальнейшие свойства преобразования Рисса можно найти в работе Хорвата [1]. Пространства $\mathbf{H}^p$ (E^+_{n+1}) были введены Стейном и Г. Вейсом [1]. Системы сопряженных гармонических функций также были изучены Кальдероном и Зигмундом [6], Стейном и Г. Вейсом [2], Кюраном [1], Койфманом и Вейсом [2]. Тот факт, что гармоническое решение F эллиптической системы обладает тем свойством, что $|F|^p$ — субгармоническая функция для некоторого $p < 1$, был замечен Кальдероном.

Глава VII

КРАТНЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

Цель этой главы — дать краткое введение в различные части теории кратных рядов Фурье. В то время как с общей точки зрения это всего лишь один из частных аспектов гармонического анализа на компактной абелевой группе, мы будем обращать внимание прежде всего на связь между анализом на n-мерном торе и на n-мерном евклидовом пространстве. Так, в § 2 рассматривается процесс «периодизации» применительно к функциям, определенным на E_n, дающий формулу суммирования Пуассона, а в § 3 рассматривается соответствующий процесс для *операторов множителей*. В §§ 4 и 5 рассматривается другой вопрос — суммируемость кратных рядов Фурье. Мы изучаем этот вопрос здесь, а не раньше, в непериодическом контексте (где можно доказать очень похожие результаты), в основном по причинам элегантности и удобства. Приведенные результаты справедливы только в случае $n > 1$ и получены при помощи методов, отличных от первоначально разработанных для решения подобных задач в более знакомом одномерном случае.

1. Элементарные свойства

Пусть Λ — аддитивная группа точек в E_n с целочисленными координатами (сложение, конечно, определяется векторной структурой E_n). Группу Λ будем называть *единичной решеткой*. Рассмотрим факторпространство E_n/Λ и отождествим обычным образом функции, определенные на E_n/Λ, с периодическими функциями на E_n. Точнее, функция f, удовлетворяющая условию $f(x+m) = f(x)$ для всех $m \in \Lambda$, отождествляется с функцией, значение которой на классе, определяемом элементом x, равно $f(x)$. Элементы группы Λ являются *периодами* этих функций.

Существует естественная реализация пространства E_n/Λ в виде *n-мерного тора* $T_n = \{(e^{2\pi i x_1}, \ldots, e^{2\pi i x_n}) \in \mathbf{C}^n;\ (x_1, \ldots, x_n) \in E_n\}$. Эта реализация дается отображением $(x_1, \ldots, x_n) \to (e^{2\pi i x_1}, \ldots, e^{2\pi i x_n})$ и отсюда же следует стандартная реализация периодических на E_n функций в виде функций на n-мерном торе.

Множество $D \subset E_n$ называется *фундаментальной областью,* если каждый класс эквивалентности из E_n/Λ содержит в точности один элемент из D. Ясно, что периодическая на E_n функция полностью определяется своими значениями на фундаментальной области. Очевидно, что существует бесконечно много фундаментальных областей; одна из них, наиболее простая и удобная для наших целей, это *основной куб* $Q_n = \{x \in E_n;\ -1/2 \leqslant x_j < 1/2,\ j = 1, \ldots, n\}$. Интегрирование на T_n можно определить при помощи ин-

теграла Лебега на Q_n: если f — функция на T_n, то положим

$$(1.1)\qquad \int\limits_{T_n} f\,dx = \int\limits_{Q_n} f\,dx$$

и будем интерпретировать это равенство следующим образом. Как было показано, каждая функция f, определенная на T_n, порождает периодическую функцию на E_n, сужение которой на Q_n есть функция, стоящая в правой части равенства (1.1). Функция f на T_n называется измеримой, если соответствующая функция на Q_n измерима по Лебегу; если последняя интегрируема, то интеграл в левой части равенства (1.1) по определению полагается равным интегралу в правой части. Аналогичным образом L^p-пространства на T_n отождествляются с L^p-пространствами на Q_n, а класс конечных борелевских мер на T_n — с классом конечных борелевских мер, сосредоточенных на основном кубе Q_n. Будем использовать обозначения $L^p(T_n)$ и $\mathscr{B}(T_n)$ для L^p-пространств на T_n и класса борелевских мер на T_n соответственно. Следует отметить, однако, что класс непрерывных функций на T_n, а именно $C(T_n)$, *не соответствует* классу всех непрерывных функций на Q_n, а только тем функциям, которые остаются непрерывными при периодическом продолжении на все E_n; $C(T_n)$ — банахово подпространство в $L^\infty(T_n)$ (т. е. мы наделяем это подпространство L^∞-нормой). Приведем здесь элементарные включения

$$\mathscr{B}(T_n) \supset L^p(T_n) \supset C(T_n)$$

и отметим, что, как обычно, $L^1(T_n)$ можно отождествить с подпространством абсолютно непрерывных мер из $\mathscr{B}(T_n)$.

Перейдем теперь к рассмотрению рядов Фурье мер и функций на T_n. Каждой мере $\mu \in \mathscr{B}(T_n)$ поставим в соответствие ряд Фурье

$$(1.2)\qquad d\mu \sim \sum_{m \in \Lambda} a_m e^{2\pi i m\cdot x},$$

где

$$(1.3)\qquad a_m = \int\limits_{T_n} e^{-2\pi i m\cdot x}\,d\mu(x)$$

— *коэффициенты Фурье — Стилтьеса* меры $d\mu$.

Для облегчения формальных манипуляций с коэффициентами Фурье удобно рассматривать для каждой меры μ из $\mathscr{B}(T_n)$ непрерывный линейный функционал

$$(1.4)\qquad L_\mu\colon\ f \to \int\limits_{T_n} f\,d\mu$$

на пространстве $C(T_n)$. Из теоремы Рисса — Маркова о представлении линейного функционала следует, что, обратно, каждый

непрерывный линейный функционал на $C(T_n)$ имеет вид (1.4) с некоторой мерой $\mu \in \mathscr{B}(T_n)$, причем $\|L_\mu\| = \|d\mu\|$, где слева стоит норма линейного функционала L_μ, а справа — норма меры μ. С помощью этого отождествления легко определить *свертку* $d\mu = d\mu_1 * d\mu_2$ *двух мер* μ_1 и μ_2 из $\mathscr{B}(T_n)$ как меру μ, определяемую при помощи (1.4) следующим линейным функционалом:

$$f \to \int_{T_n} f d\mu = \int_{T_n}\int_{T_n} f(x+y)\, d\mu_1(x)\, d\mu_2(y). \tag{1.5}$$

Из этого определения видно, что $\|d\mu\| \leqslant \|d\mu_1\|\|d\mu_2\|$ и что с этой операцией свертки $\mathscr{B}(T_n)$ является коммутативной банаховой алгеброй. Если в равенстве (1.5) положим $f(x) = e^{-2\pi i m\cdot x}$, то получим *формулу умножения*

$$d\mu_1 * d\mu_2 \sim \sum_{m\in\Lambda} a_m b_m e^{2\pi i m\cdot x}, \tag{1.6}$$

где $\{a_m\}$ и $\{b_m\}$ — коэффициенты Фурье — Стилтьеса мер $d\mu_1$ и $d\mu_2$ соответственно.

Из равенства (1.5) нетрудно получить другое определение свертки $d\mu_1 * d\mu_2$. Это есть мера μ, такая, что

$$\mu(E) = \int_{T_n} \mu_1(E-y)\, d\mu_2(y)$$

для каждого борелевского множества E. Отсюда ясно, что если мера μ_1 (или μ_2) абсолютно непрерывна, то μ также абсолютно непрерывна. Мера μ_1 абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда она имеет производную Радона — Никодима $f \in L^1(T_n)$. В этом случае производная Радона — Никодима меры μ есть функция h, определяемая равенством

$$h(x) = \int_{T_n} f(x-y)\, d\mu_2(y).$$

Этот интеграл сходится абсолютно для почти всех x, в силу теоремы Фубини. Если μ_2 также абсолютно непрерывна и имеет производную Радона — Никодима $g \in L^1(T_n)$, то

$$h(x) = \int_{T_n} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

Отсюда видно, что $L^1(T_n)$ наследует сверточную структуру из $\mathscr{B}(T_n)$. В частности, формула умножения (1.6) справедлива также и для функций из L^1.

Для того чтобы сформулировать основные утверждения о полноте разложения в ряд Фурье, удобно называть *конечную* сумму вида $\sum a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ *тригонометрическим полиномом*.

Теорема 1.7. (i) *Тригонометрические полиномы плотны в* $C(T_n)$ *и* $L^p(T_n)$, $1 \leqslant p < \infty$.

(ii) *Пусть для некоторой меры* $\mu \in \mathscr{B}(T_n)$ *коэффициенты Фурье* $\int\limits_{T_n} e^{-2\pi i m \cdot x} d\mu(x) = 0$ *для всех* $m \in \Lambda$; *тогда* $\mu = 0$.

(iii) *Пусть* $f \in L^2(T_n)$ *и* $f \sim \sum\limits_{m \in \Lambda} a_m e^{2\pi i m \cdot x}$; *тогда*

$$\sum_{m \in \Lambda} |a_m|^2 = \|f\|_2^2.$$

Соответствие $f \longleftrightarrow \{a_m\} = \left\{\int\limits_{T_n} e^{-2\pi i m \cdot x} f(x)\, dx\right\}$ *есть унитарное отображение* $L^2(T_n)$ *на* $l^2(\Lambda)$.

Доказательство. Поскольку тригонометрические полиномы образуют алгебру, разделяющую точки на n-мерном торе, содержащую постоянные и замкнутую относительно комплексного сопряжения, можно применить теорему Стоуна — Вейерштрасса и убедиться в плотности тригонометрических полиномов в $C(T_n)$. Из этого свойства и из плотности $C(T_n)$ в $L^p(T_n)$, $1 \leqslant p < \infty$, следует соответствующее утверждение для $L^p(T_n)$.

Для доказательства утверждения (ii) заметим, что свойство $\int\limits_{T_n} e^{-2\pi i m \cdot x} d\mu(x) = 0$ для всех $m \in \Lambda$ эквивалентно тому, что

$$\int\limits_{T_n} P(x)\, d\mu(x) = 0$$

для всех тригонометрических полиномов P. Но, в силу (i), отсюда вытекет, что $\int\limits_{T_n} f(x)\, d\mu(x) = 0$ для всех $f \in C(T_n)$ и, следовательно, $\mu = 0$.

Пусть задана $f \in L^2(T_n)$; тогда если N — положительное целое число, то нижняя грань выражения $\left\| f - \sum\limits_{|m| \leqslant N} a_m e^{2\pi i m \cdot x} \right\|_2$ достигается, когда числа a_m равны *коэффициентам Фурье* $\int\limits_{T_n} e^{-2\pi i m \cdot x} f(x)\, dx$ функции f. Это утверждение следует, как хорошо известно, из того, что функции $\{e^{2\pi i m \cdot x}\}$ взаимно ортогональны и нормированы (по L^2-норме). Поскольку, как мы знаем, каждую функцию $f \in L^2(T_n)$ можно приблизить тригонометрическими полиномами, то $\lim\limits_{N \to \infty} \left\| f - \sum\limits_{|m| \leqslant N} a_m e^{2\pi i m \cdot x} \right\|_2 = 0$. Следовательно,

$$\|f\|_2 - \left\| \sum_{|m| \leqslant N} a_m e^{2\pi i m \cdot x} \right\|_2 \to 0$$

при $N \to \infty$ и $\|f\|_2 = \left(\sum_{m \in \Lambda} |a_m|^2\right)^{1/2}$. Отсюда видно, что отображение $f \to \{a_m\}$ изометрическое. Если оно является, кроме того, отображением «на», то оно унитарно. Действительно, пусть задана последовательность $\{a_m\}$, такая, что $\sum_{m \in \Lambda} |a_m|^2 < \infty$; положим $s_N(x) = \sum_{|m| \leqslant N} a_m e^{2\pi i m \cdot x}$. Ясно, что $\|s_{N_1} - s_{N_2}\|_2 = \left(\sum_{N_1 < |m| \leqslant N_2} |a_m|^2\right)^{1/2}$ при $N_1 < N_2$. Следовательно, $\{s_N\}$ — фундаментальная последовательность в $L^2(T_n)$, и, значит, она сходится по норме к некоторой функции $f \in L^2(T_n)$. Поскольку

$$a_m = \int_{T_n} s_N(x)\, e^{-2\pi i x \cdot m} dx, \text{ если } |m| \leqslant N,$$

то

$$a_m = \int_{T_n} f(x)\, e^{-2\pi i x \cdot m} dx \text{ для всех } m \in \Lambda.$$

Отсюда следует утверждение (iii), и теорема доказана. Выведем теперь несколько полезных следствий этой теоремы.

Следствие 1.8. *Пусть $f \in L^1(T_n)$ и $\sum_{m \in \Lambda} |a_m| < \infty$, где $\{a_m\}$ — коэффициенты Фурье функции f; тогда функция, равная $\sum_{m \in \Lambda} a_m e^{2\pi i m \cdot x}$, принадлежит $C(T_n)$ и совпадает с f для почти всех $x \in T_n$.*

Доказательство. Из условия следует, что функция $f(x) - \sum_{m \in \Lambda} a_m e^{2\pi i m \cdot x}$ имеет нулевые коэффициенты Фурье, так что, в силу утверждения (ii) теоремы 1.7, эта функция почти всюду равна 0.

Пусть k — положительное целое число; класс $C^{(k)}(Q_n)$ $(=C^{(k)}(T_n))$ состоит из сужений на Q_n всех периодических функций на E_n, принадлежащих классу $C^{(k)} = C^{(k)}(E_n)$ [1].

---

[1] То есть из периодических функций f, имеющих всюду определенные непрерывные производные $D^\alpha f$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — (целый неотрицательный) мультииндекс, такой, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqslant k$. Напомним, что в гл. I оператор D^α был определен следующим образом:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

В гл. I сумма $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ обозначалась символом $|\alpha|$, однако при доказательстве теоремы 1.7 символ $|m|$ обозначал евклидову норму точки m, принадлежащей решетке Λ. Во избежание недоразумений мы не используем здесь обозначение $|\alpha|$, введенное в первой главе.

Следствие 1.9. *Пусть* $f \in C^{(k)}(T_n)$ *для* $k > n/2$; *тогда* $\sum_{m \in \Lambda} |a_m| < \infty$, *где* $\{a_m\}$ — *коэффициенты Фурье функции* f.

Доказательство. В первой главе x^α было определено для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n$ и мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ как $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ (а также было принято соглашение о том, что $0^0 = 1$). Используя эти обозначения и интегрируя по частям, получим

$$\int_{T_n} (D^\alpha f)(x)\, e^{-2\pi i m \cdot x}\, dx = (2\pi i m)^\alpha \int_{T_n} f(x)\, e^{-2\pi i m \cdot x} dx = (2\pi i m)^\alpha a_m$$

для всех $f \in C^{(k)}(T_n)$ и $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leqslant k$. Поскольку $D^\alpha f$ непрерывна, она принадлежит $L^2(T_n)$, и, следовательно, в силу теоремы 1.7 (iii),

$$\sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k} \left\{ \sum_{m \in \Lambda} |a_m|^2 [(2\pi m)^\alpha]^2 \right\} < \infty. \tag{1.10}$$

Простые вычисления показывают, что существует постоянная $c = c(k, n)$, зависящая только от размерности n и от k, такая, что

$$\sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k} [(2\pi m)^\alpha]^2 \geqslant c\, |m|^{2k}.$$

Тогда, в силу неравенства Шварца,

$$\sum_{|m|>0} |a_m| \leqslant \sum_{|m|>0} |a_m| \left(\sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k} [(2\pi m)^\alpha]^2 \right)^{1/2} c^{-1/2} |m|^{-k} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{|m|>0} |a_m|^2 \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k} [(2\pi m)^\alpha]^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|m|>0} |m|^{-2k} \right)^{1/2} c^{-1/2}.$$

Если $k > n/2$, то сумма $\sum_{|m|>0} |m|^{-2k}$ конечна; следовательно, последнее выражение также конечно в силу неравенства (1.10). Таким образом, следствие доказано.

Следующее утверждение есть известная теорема Римана — Лебега в рассматриваемом контексте.

Следствие 1.11. *Если* $f \in L^1(T_n)$ *и* $f \sim \sum_{m \in \Lambda} a_m e^{2\pi i m \cdot x}$, *то* $a_m \to 0$ *при* $|m| \to \infty$.

Доказательство. Предположим сначала, что $f \in L^2(T_n)$. Тогда утверждение, что $a_m \to 0$, есть немедленное следствие того, что $\sum_{m \in \Lambda} |a_m|^2 < \infty$ (см. теорему 1.7 (iii)). В общем случае $f \in L^1(T_n)$ для данного $\varepsilon > 0$ существуют f_1 и f_2, такие, что $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in L^2(T_n)$ и $\|f_2\|_1 < \varepsilon$. Тогда если $\{a_m^{(j)}\}$ — коэффициенты

Фурье функции f_j, то $\lim\limits_{|m|\to\infty} a_m^{(1)} = 0$ и $|a_m^{(2)}| \leqslant \|f_2\|_1 < \varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{|m|\to\infty} \sup |a_m| \leqslant \varepsilon$, где $a_m = a_m^{(1)} + a_m^{(2)}$, $m \in \Lambda$, — коэффициенты Фурье функции f. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, это доказывает следствие.

2. Формула суммирования Пуассона

Вместо того чтобы шаг за шагом развивать дальше аналогию между свойствами рядов и интегралов Фурье, обратимся теперь к главному вопросу, которому посвящена эта глава. Его можно сформулировать в следующем общем виде. Пусть дан «элемент» функционального пространства, ассоциированного с E_n (т. е. функция, определенная на E_n, оператор на функциях, определенных на E_n, и т. д.); каков его периодический аналог, т. е. какой объект соответствует ему на n-мерном торе T_n? Кроме того, было бы интересно понять, как можно вывести свойства такого объекта в его периодической форме по уже известным свойствам его непериодической формы.

Рассмотрим сначала эти вопросы для функций, определенных на E_n. Чтобы лучше понять сущность стоящих перед нами задач, будем действовать формально, не заботясь временно о правомерности предельных переходов.

Пусть f — некоторая (подходящая) функция на E_n. Существуют по крайней мере два способа получения из f периодической функции. Первая конструкция элементарна и не связана с гармоническим анализом. Рассмотрим сумму

$$\sum_{m\in\Lambda} f(x+m). \tag{2.1}$$

Поскольку эта (формальная) сумма взята по всем точкам решетки Λ, ясно, что она периодическая (для перехода от x к $x+m'$ нужно просто переставить члены в сумме (2.1)). Будем называть переход от f к сумме (2.1) *периодизацией* функции f.

Для того чтобы описать второй подход, напишем

$$f(x) \sim \int_{E_n} \hat{f}(y)\, e^{2\pi i x\cdot y} dy; \tag{2.2}$$

это есть не что иное, как формула обращения преобразования Фурье, где

$$\hat{f}(y) = \int_{E_n} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot y} dx.$$

Тогда периодическим аналогом функции f (определяемой формулой (2.2)) будет

$$\sum_{m\in\Lambda} \hat{f}(m)\, e^{2\pi i x\cdot m}. \tag{2.3}$$

Содержание формулы суммирования Пуассона заключается фактически в том, что эти два подхода к периодическому аналогу функции f, выражаемые формулами (2.1) и (2.3), по существу совпадают. Это утверждение можно строго сформулировать различными способами. Наиболее простым и прямым является следующий:

Теорема 2.4. *Пусть* $f \in L^1(E_n)$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{m \in \Lambda} f(x+m)$ *сходится по норме* $L^1(Q_n)\ (= L^1(T_n))$. *Его сумма принадлежит* $L^1(Q_n)$ *и имеет разложение в ряд Фурье*

$$\sum_{m \in \Lambda} \hat{f}(m)\, e^{2\pi i x \cdot m}. \tag{2.5}$$

Это означает, что $\{\hat{f}(m)\}$ — *коэффициенты Фурье* L^1-*функции, определяемой рядом* $\sum\limits_{m \in \Lambda} f(x+m)$, *где для любого* $y \in E_n$

$$\hat{f}(y) = \int_{E_n} f(x)\, e^{-2\pi i y \cdot x} dx.$$

Доказательство. Если $Q_n - m$ есть сдвиг куба Q_n на элемент решетки m, то

$$\int_{Q_n} \Big| \sum_{m \in \Lambda} f(x+m) \Big| dx \leqslant \sum_{m \in \Lambda} \int_{Q_n} |f(x+m)|\, dx = \sum_{m \in \Lambda} \int_{Q_n - m} |f(x)|\, dx.$$

Поскольку куб Q_n — фундаментальная область, сдвиги $Q_n - m$ попарно не пересекаются и их объединение равно E_n. Тогда

$$\sum_{m \in \Lambda} \int_{Q_n - m} |f(x)|\, dx = \int_{E_n} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{m \in \Lambda} f(x+m)$ (абсолютно) сходится по норме $L^1(Q_n)$. Меняя опять местами порядок интегрирования и суммирования, вычислим коэффициенты Фурье функции $\sum\limits_{m \in \Lambda} f(x+m)$. Получим

$$\int_{Q_n} \Big(\sum_{m' \in \Lambda} f(x+m') \Big) e^{-2\pi i m \cdot x} dx = \sum_{m' \in \Lambda} \int_{Q_n - m'} f(x)\, e^{-2\pi i m \cdot x} dx =$$

$$= \int_{E_n} f(x)\, e^{-2\pi i m \cdot x} dx = \hat{f}(m).$$

Рассуждения, приведенные выше для доказательства L^1-сходимости, показывают также, что это изменение порядка законно, а, значит, сумма $\sum\limits_{m' \in \Lambda} f(x+m')$ действительно имеет разложение в ряд Фурье (2.5).

Следующее утверждение является полезным частным случаем теоремы 2.4:

Следствие 2.6. *Пусть* $\hat{f}(y) = \int_{E_n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot y} dx$ *и*

$$f(x) = \int_{E_n} \hat{f}(y) e^{2\pi i x \cdot y} dy,$$

причем $|f(x)| \leqslant A(1 + |x|)^{-n-\delta}$ *и* $|\hat{f}(y)| \leqslant A(1 + |y|)^{-n-\delta}$, $\delta > 0$ *(так что* f *и* $\hat{f}$ *можно считать непрерывными). Тогда*

$$\sum_{m \in \Lambda} f(x + m) = \sum_{m \in \Lambda} \hat{f}(m) e^{2\pi i m \cdot x} \tag{2.7}$$

и, в частности,

$$\sum_{m \in \Lambda} f(m) = \sum_{m \in \Lambda} \hat{f}(m). \tag{2.8}$$

Все четыре ряда в равенствах (2.7) *и* (2.8) *сходятся абсолютно* [1].

Доказательство. В силу наших предположений о функции $\hat{f}$, ряд Фурье

$$\sum_{m \in \Lambda} \hat{f}(m) e^{2\pi i m \cdot x}$$

сходится абсолютно. Поэтому, согласно следствию 1.8 и теореме 2.4, функцию $\sum_{m \in \Lambda} f(x + m)$ можно изменить на множестве меры 0 так, что она станет равной непрерывной функции $\sum_{m \in \Lambda} \hat{f}(m) e^{2\pi i m \cdot x}$. Из сравнения с рядом $\sum_{m \in \Lambda} (1 + |m|)^{-n-\delta}$ видно, что $\sum_{m \in \Lambda} f(x + m)$ — равномерно сходящийся ряд, члены которого — непрерывные функции. Следовательно, его сумма уже непрерывна и равенство (2.7) справедливо для всех x.

Проиллюстрируем теперь на двух примерах, как используется формула суммирования Пуассона. В первом примере рассмотрим аналог задачи об обращении преобразования Фурье, изученной в гл. I: при каких условиях ряд

$$\sum_{m \in \Lambda} a_m e^{2\pi i m \cdot x}$$

[1] Тождество (2.8) известно как *формула суммирования Пуассона*, но мы будем использовать это же название для (2.7) и вообще для теоремы 2.4.

«суммируется» к функции $f(x)$, когда $a_m = \int\limits_{T_n} f(x) e^{-2\pi i m\cdot x} dx$, $f \in L^1(T_n)$? На основании результатов первой главы естественно попытаться заменить приведенную выше сумму пределом

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{m\in\Lambda} \Phi(\varepsilon m) a_m e^{2\pi i m\cdot x}, \tag{2.9}$$

где Φ — подходящая непрерывная функция, $\Phi(0) = 1$. Учитывая следствие 2.6, сделаем следующие предположения о функции Φ:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(i)}\ \Phi(y) = \hat{\varphi}(y), \quad \text{где} \quad \int\limits_{E_n} \varphi(x)\, dx = 1; \\ \text{(ii)}\ |\Phi(y)| \leqslant A(1+|y|)^{-n-\delta},\ |\varphi(x)| \leqslant A(1+|x|)^{-n-\delta} \\ \qquad\qquad \text{для некоторого } \delta > 0. \end{array}\right. \tag{2.10}$$

Теорема 2.11. *Пусть функция Φ удовлетворяет условиям* (2.10), $f \in L^p(T_n)$ *и* $f(x) \sim \sum\limits_{m\in\Lambda} a_m e^{2\pi i m\cdot x}$. *Тогда:*

(a) *если* $1 \leqslant p < \infty$, *то выражение* (2.9) *сходится к* f *по норме* $L^p(T_n)$;

(b) *если* $f \in C(T_n)$, *то сходимость в* (2.9) *равномерна;*

(c) *для любой* $f \in L^1(T_n)$ *выражение* (2.9) *сходится к* $f(x)$ *во всех точках x лебегова множества функции f (и, следовательно, почти всюду).*

Доказательство. Введем обозначения $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ и $\Phi^\varepsilon(y) = \Phi(\varepsilon y)$, $\varepsilon > 0$. Тогда, как известно, $\Phi^\varepsilon = (\varphi_\varepsilon^\varepsilon)^\wedge$. Кроме того, в силу (2.10), φ_ε и Φ^ε удовлетворяют условиям следствия 2.6, и, таким образом,

$$\sum_{m\in\Lambda} \Phi(\varepsilon m) e^{2\pi i m\cdot x} = \sum_{m\in\Lambda} \varphi_\varepsilon(x+m). \tag{2.12}$$

Обозначим правую часть равенства (2.12) через $K_\varepsilon(x)$. Тогда

$$(f * K_\varepsilon)(x) = \sum_{m\in\Lambda} \Phi(\varepsilon m) a_m e^{2\pi i m\cdot x},$$

где подразумевается свертка, введенная в § 1 (см., в частности, (1.6)). В силу предположений о функции Φ, последний ряд сходится абсолютно. С другой стороны,

$$\int\limits_{T_n} |K_\varepsilon(x)|\, dx \leqslant \int\limits_{Q_n} \sum_{m\in\Lambda} |\varphi_\varepsilon(x+m)|\, dx = \int\limits_{E_n} |\varphi_\varepsilon(x)|\, dx = \int\limits_{E_n} |\varphi(x)|\, dx.$$

Поскольку $\|f*K_\varepsilon\|_p \leqslant \|f\|_p \|K_\varepsilon\|_1$ (где имеются в виду нормы пространств $L^p(T_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$), ясно, что отображения

$$M_\varepsilon\colon f \to \sum_{m\in\Lambda} \Phi(\varepsilon m)\, a_m e^{2\pi i x\cdot m}$$

равномерно ограничены по ε, $\varepsilon > 0$, как операторы на $L^p(T_n)$. В силу непрерывности функции Φ и поскольку $\int\limits_{E_n} \varphi(x)\,dx = 1$, имеем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \Phi(\varepsilon m) = 1$; следовательно, $M_\varepsilon f \to f$ при $\varepsilon \to 0$ (по L^p-норме) для всех тригонометрических полиномов f. Так как тригонометрические полиномы плотны в $L^p(T_n)$ для $p<\infty$ и в $C(T_n)$, то, в силу только что установленной равномерной ограниченности, части (a) и (b) теоремы доказаны.

Прежде чем доказывать часть (c), поясним сначала, что, называя x *точкой лебегова множества* функции f, мы подразумеваем, что x есть точка лебегова множества периодически продолженной на все пространство E_n функции f.

Ясно, что после подходящего сдвига можно выбрать точку x в начале координат (центре основного куба Q_n). Пусть $\tilde f(x) = f(x)$ для $x \in Q_n$ и $\tilde f(x) = 0$ для $x \in E_n \setminus Q_n$. Поскольку свойство принадлежности точки к лебегову множеству какой-либо функции локально, 0 будет точкой лебегова множества функции $\tilde f$. Далее,

$$\sum_{m\in\Lambda} \Phi(\varepsilon m)\, a_m = \int\limits_{Q_n} f(x)\, K_\varepsilon(-x)\,dx = \sum_{m\in\Lambda} \int\limits_{Q_n} f(x)\, \varphi_\varepsilon(-x+m)\,dx =$$
$$= \int\limits_{Q_n} f(x)\, \varphi_\varepsilon(-x)\,dx + \sum_{m\neq 0} \int\limits_{Q_n} f(x)\, \varphi_\varepsilon(-x+m)\,dx.$$

В силу предположений о функции φ, имеем

$$|\varphi_\varepsilon(-x+m)| \leqslant A\left(1 + \left|\frac{-x+m}{\varepsilon}\right|\right)^{-n-\delta} \varepsilon^{-n} =$$
$$= \varepsilon^\delta A\,(\varepsilon + |-x+m|)^{-(n+\delta)} \leqslant \varepsilon^\delta A' \,|m|^{-(n+\delta)},$$
$$x \in Q_n \quad \text{и} \quad |m| \geqslant 1.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{m\neq 0} \int\limits_{Q_n} f(x)\, \varphi_\varepsilon(-x+m)\,dx\right| \leqslant \varepsilon^\delta A'' \int\limits_{Q_n} |f(x)|\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Кроме того, $\int\limits_{Q_n} f(x)\, \varphi\ (-x)\,dx = \int\limits_{E_n} \tilde f(x)\, \varphi_\varepsilon(-x)\,dx$. Но условие

$|\varphi(x)| \leqslant A(1+|x|)^{-n-\delta}$ позволяет применить к последнему интегралу теорему 1.25 гл. I; при этом получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{E_n} \tilde{f}(x)\,\varphi_\varepsilon(-x)\,dx = \tilde{f}(0) = f(0).$$

Это доказывает часть (c) и завершает доказательство теоремы 2.11.

Два частных случая этой теоремы заслуживают особого внимания. Сначала рассмотрим $\varphi(x) = c_n(1+|x|^2)^{-(n+1)/2}$; при этом $\Phi(y) = e^{-2\pi|y|}$ (см. теорему 1.14 гл. I). В этом случае ряд (2.9) принимает вид (если писать t вместо ε)

$$\sum_{m\in\Lambda} e^{-2\pi|m|t} a_m e^{2\pi i m\cdot x}. \tag{2.13}$$

Этот абсолютно сходящийся при $t>0$ ряд называется *интегралом Пуассона* (или *Абеля — Пуассона*) функции f; он равен свертке *f с ядром Пуассона*

$$P_t(x) = \sum_{m\in\Lambda} e^{-2\pi|m|t} e^{2\pi i m\cdot x}.$$

Из равенства (2.12) следует, что $P_t(x) \geqslant 0$ при $t>0$ и $x \in Q_n$. Кроме того,

$$\int_{Q_n} P_t(x)\,dt = \int_{Q_n} 1\,dx + \int_{Q_n} \sum_{m\neq 0} e^{-2\pi|m|t} e^{2\pi i m\cdot x}\,dx = 1+0=1.$$

В качестве второго примера рассмотрим $\Phi(y) = (1-|y|^2)^\alpha$ при $|y| \leqslant 1$ и $\Phi(y) = 0$ при $|y| \geqslant 1$. В силу теоремы 4.15 гл. IV, имеем

$$\varphi(x) = \hat{\Phi}(x) = \pi^{-\alpha}\,\Gamma(\alpha+1)\,|x|^{-(n/2)-\alpha} J_{(n/2)+\alpha}(2\pi|x|).$$

Поэтому если $\alpha > (n-1)/2$, то из леммы 3.11 гл. IV следует, что Φ (и φ) удовлетворяет условиям (2.10). Следовательно, в этом случае получаем соответствующую сходимость *средних Рисса* [1])

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{|m|<R} \left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^\alpha a_m e^{2\pi i m\cdot x}, \quad \alpha > \frac{n-1}{2}. \tag{2.14}$$

Суммируем эти результаты в следующем виде:

Следствие 2.15. *Заключения теоремы* 2.11 *справедливы, в частности, для средних Рисса* (2.14), *когда α больше критического показателя, и для средних Абеля — Пуассона* (2.13).

---

[1]) Число $(n-1)/2$ — нижняя грань значений α, для которых функции Φ и $\varphi = \hat{\Phi}$ удовлетворяют условиям (2.10),— называется *критическим показателем* (для сходимости средних Рисса (2.14)).

Средние Рисса порядка, не превосходящего критического показателя, требуют более тонкого обращения и будут рассматриваться в §§ 4 и 5 ниже.

Предложенное выше приложение формулы суммирования Пуассона касалось периодических аналогов операторов регуляризации, возникающих при обращении преобразования Фурье. Второе приложение является типичным примером ситуации, когда формулу суммирования Пуассона можно применять для получения точных оценок, использующих различные (периодические) элементарные функции.

В четвертой главе (см. теорему 4.1) было показано, что если α — комплексное число, такое, что $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$, и $f(x) = |x|^{\alpha-n}$, то $\hat{f}(x) = \gamma_\alpha |x|^{-\alpha}$, где $\gamma_\alpha = \pi^{-\alpha+n/2}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma[(n-\alpha)/2]$. Если применить тождество (2.7), игнорируя вопросы сходимости, то получим

$$\gamma_\alpha^{-1} \sum_{m\in\Lambda} |x+m|^{\alpha-n} = \sum_{m\in\Lambda} |m|^{-\alpha} e^{2\pi i m\cdot x}. \tag{2.16}$$

В таком виде это соотношение не может быть верным, так как справа имеется бесконечный член, отвечающий $m = 0$, а ряд слева расходится. Тем не менее после соответствующих изменений можно и в данном случае применить формулу суммирования Пуассона. Один из способов проделать это основан на использовании функционального уравнения для дзета-функции Римана и некоторых ее обобщений. Этот способ описан в п. 6.3 ниже. Другую интерпретацию равенства (2.16) дает следующая

Теорема 2.17. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$. *Тогда* $\sum_{|m|>0} |m|^{-\alpha} e^{2\pi i m\cdot x}$ *есть ряд Фурье интегрируемой на* Q_n *функции класса* C^∞ *на* $Q_n \setminus \{0\}$. *В нуле эта функция имеет такую же особенность, как функция* $\gamma_\alpha^{-1}|x|^{\alpha-n}$, *т. е.*

$$\gamma_\alpha^{-1}|x|^{\alpha-n} + b(x) \sim \sum_{|m|>0} |m|^{-\alpha} e^{2\pi i m\cdot x} \qquad (x \in Q_n),$$

где $b \in C^\infty(Q_n)$.

Доказательство. Выберем функцию η со следующими свойствами: $\eta \in C^\infty(E_n)$, $\eta(x) = 1$ при $|x| \geqslant 1$ и η равна нулю в окрестности нуля. Определим затем функцию F, положив $F(x) = \eta(x)|x|^{-\alpha}$ для $x \in E_n$. Тогда существует функция $f \in L^1(E_n)$, такая, что

(1) $\hat{f} = F$;

(2) $f(x) = \gamma_\alpha^{-1} |x|^{\alpha-n} + b_1(x)$, где $b_1 \in C^\infty(E_n)$;

(3) $|D^\beta f(x)| = O(|x|^{-N})$ при $|x| \to \infty$ для всех мультииндексов β и положительных целых чисел N.

Действительно, запишем F в виде $F(x) = |x|^{-\alpha} + (\eta(x) - 1)|x|^{-\alpha}$, и пусть f — обратное преобразование Фурье функции F в смысле обобщенных функций медленного роста. Тогда, в силу (4.1) гл. IV, $f(x) = \gamma_\alpha^{-1} |x|^{\alpha-n} + b_1(x)$, где b_1 — обратное преобразование Фурье интегрируемой функции с компактным носителем, равной $(\eta(x) - 1)|x|^{-\alpha}$. Следовательно, $b_1 \in C^\infty(E_n)$ и свойства (1) и (2) установлены. Поскольку f — обратное преобразование Фурье функции F, то $(2\pi i x)^\beta f(x)$ — обратное преобразование Фурье функции $D^\beta F$ для любого мультииндекса β (см. теорему 1.8 гл. I). Заметим, что если порядок частной производной $D^\beta F$ достаточно высок ($\beta_1 + \cdots + \beta_n > n - \operatorname{Re}\alpha$), то $D^\beta F \in L^1(E_n)$; следовательно, когда это имеет место, $(2\pi i x)^\beta f(x)$ ограничена. Отсюда вытекает, что $|f(x)| = O(|x|^{-N})$ при $|x| \to \infty$. Остальная часть свойства (3) доказывается аналогично. То что $f \in L^1(E_n)$, следует из свойства (2) и только что установленной оценки $|f(x)| = O(|x|^{-N})$ при $|x| \to \infty$.

Применим теперь формулу суммирования Пуассона в том виде, как дает ее теорема 2.4, к только что построенной функции f и $\hat{f} = F$. Получим

$$\sum_{m \in \Lambda} f(x+m) \sim \sum_{m \in \Lambda} F(m)\, e^{2\pi i x \cdot m} = \sum_{|m|>0} |m|^{-\alpha} e^{2\pi i x \cdot m}.$$

Поскольку

$$\sum_{m \in \Lambda} f(x+m) = f(x) + \sum_{|m|>0} f(x+m) = \gamma_\alpha^{-1} |x|^{\alpha-n} + b_1(x) + \sum_{|m|>0} f(x+m),$$

теорема справедлива с $b(x) = b_1(x) + \sum\limits_{|m|>0} f(x+m)$.

Этим методом можно исследовать, кроме $\sum\limits_{|m|>0} |m|^{-\alpha} e^{2\pi i m \cdot x}$, и другие ряды. Некоторые из них упоминаются в п. 6.1 ниже.

3. Преобразования множителей

В гл. I был изучен класс ограниченных операторов из $L^p(E_n)$ в $L^q(E_n)$, коммутирующих со сдвигами. Было показано, что фактически каждый такой оператор T определяется обобщенной функцией медленного роста u, такой, что $Tf = u * f$ для всех $f \in \mathcal{S}$.

Преобразование Фурье переводит это равенство в $(Tf)^\wedge = \hat{u}\hat{f}$, так что T эквивалентен оператору, переводящему основную функцию в произведение ее преобразования Фурье на обобщенную функцию $\hat{u}$. В общем случае о таких «мультипликаторах» $\hat{u}$ известно не слишком много, однако, когда $p = q$, можно показать, кроме всего прочего, что $\hat{u}$ — ограниченная измеримая функция. Теорема 3.18 гл. I утверждает, что это имеет место при $p = 2 = q$. Если $p \neq 2$ и $\| u * f \|_p \leqslant A \| f \|_p$ для всех $f \in \mathcal{S}$, то из теоремы 3.20 гл. I следует, что $\| u * f \|_{p'} \leqslant A \| f \|_{p'}$ для всех $f \in \mathcal{S}$, где $(1/p) + (1/p') = 1$. Поскольку в этом случае 2 лежит между p и p', то из интерполяционной теоремы М. Рисса (см. теорему 1.3 гл. V) следует, что оператор T: $f \to u * f$ имеет тип (2, 2). Следовательно, $\hat{u}$ удовлетворяет предположениям теоремы 3.18 и является ограниченной измеримой функцией.

Теперь мы собираемся изучить аналогичные операторы множителей в периодическом случае и показать, что важный класс таких операторов обладает свойствами, a priori следующими из их непериодических аналогов.

Введем сначала несколько обозначений. В гл. I мы обозначили символом (L^p, L^q) класс ограниченных операторов T из $L^p(E_n)$ в $L^q(E_n)$, коммутирующих со сдвигами (или, эквивалентно, класс обобщенных функций медленного роста u, таких, что $\| u * \varphi \|_q \leqslant A \| \varphi \|_p$ для некоторого $A = A(u)$ и всех $\varphi \in \mathcal{S}$). Для того чтобы подчеркнуть тот факт, что эти операторы действуют на функциях, определенных на E_n, будем теперь обозначать этот класс $(L^p(E_n), L^q(E_n))$. Подобным образом для периодического случая введем класс $(L^p(T_n), L^q(T_n))$ всех ограниченных операторов $\tilde{T}$ из $L^p(T_n)$ в $L^q(T_n)$, коммутирующих со сдвигами.

По аналогии с непериодическим случаем можно отождествить каждый оператор $\tilde{T} \in (L^p(T_n), L^q(T_n))$ со сверткой (на T_n) с некоторой обобщенной функцией медленного роста. Однако в периодическом случае намного проще рассматривать непосредственно сами операторы.

Теорема 3.1. *Пусть $\tilde{T} \in (L^p(T_n), L^q(T_n))$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Тогда существует ограниченная комплекснозначная функция λ: $m \to \lambda(m)$, определенная на решетке Λ и такая, что*

$$\tilde{T} f \sim \sum_{m \in \Lambda} \lambda(m) a_m e^{2\pi i m \cdot x} \tag{3.2}$$

для всех $f \sim \sum_{m \in \Lambda} a_m e^{2\pi i m \cdot x}$.

Доказательство. Положим $\psi_m(x) = (\tilde{T}e_m)(x)$, где $e_m(y) = e^{2\pi i m\cdot y}$, $m \in \Lambda$. Тогда $\|\psi_m\|_q \leqslant A\|e_m\|_p = A$. Если τ_h — оператор сдвига на h (т. е. для периодической функции f имеем $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$), то из условия $\tilde{T}\tau_h = \tau_h\tilde{T}$ следует, что для всех $h \in Q_n$

$$\psi_m(x-h) = e^{-2\pi i m\cdot h}\psi_m(x)$$

для почти всех x. Тогда, в силу теоремы Фубини, это тождество справедливо для почти всех $h \in Q_n$, если фиксировано некоторое $x\,(=x_0)$. Это означает, что $\psi_m(h) = e^{2\pi i m\cdot h}\; e^{-2\pi i m\cdot x_0}\psi_m(x_0)$ для почти всех h. Таким образом,

$$\psi_m(x) = \lambda(m)\, e^{2\pi i m\cdot x}$$

для почти всех x, где $\lambda(m) = e^{-2\pi i m\cdot x_0}\;\psi_m(x_0)$. Кроме того, $|\lambda(m)| = |\lambda(m)|\,\|e_m\|_q = \|\lambda(m)\,e_m\|_q = \|\psi_m\|_q \leqslant A$.

Переходя к конечным линейным комбинациям функций $\{e_m\}$, получим представление (3.2) для тригонометрических полиномов f. Простой предельный переход обобщает это представление на все $f \in L^p(T_n)$, и теорема доказана.

Из теоремы 3.1 видно, что естественно называть преобразования $\tilde{T} \in (L^p(T_n),\, L^q(T_n))$ *операторами множителей,* а соответствующие последовательности $\{\lambda(m)\}$ — *мультипликаторами* (или *множителями*).

Следующее утверждение вытекает из этой теоремы и части (iii) теоремы 1.7:

Следствие 3.3. *Преобразование* $\tilde{T}$ *принадлежит* $(L^2(T_n),\, L^2(T_n))$ *тогда и только тогда, когда* $\{\lambda(m)\}$ *— ограниченная последовательность. Кроме того, операторная норма* $\|\tilde{T}\|$ *равна* $\sup\limits_{m\in\Lambda}|\lambda(m)|$.

Случай пространства L^1 аналогичен своему непериодическому эквиваленту, рассмотренному в первой главе. Точнее, справедлив следующий результат:

Теорема 3.4. *Преобразование* $\tilde{T}$ *принадлежит* $(L^1(T_n),\, L^1(T_n))$ *тогда и только тогда, когда существует конечная борелевская мера* μ *на* T_n, *такая, что*

$$d\mu \sim \sum_{m\in\Lambda}\lambda(m)\, e^{2\pi i m\cdot x}. \tag{3.5}$$

В этом случае $\|d\mu\| = \|\tilde{T}\|$.

Доказательство. Пусть $\|\tilde{T} f\|_1 \leqslant A\|f\|_1$ для всех $f \in L^1(T_n)$. Для $t > 0$ положим $f_t(x) = P_t(x) = \sum_{m \in \Lambda} e^{-2\pi|m|t} e^{2\pi i m \cdot x}$. Раньше было показано (см. обсуждение после (2.13)), что $\|f_t\|_1 = 1$. Поэтому

$$\|\tilde{T} f_t\|_1 = \int_{Q_n} \left| \sum_{m \in \Lambda} e^{-2\pi|m|t} e^{2\pi i m \cdot x} \lambda(m) \right| dx \leqslant A.$$

Следовательно, существует последовательность положительных чисел $\{t_n\}$, стремящаяся к 0 и такая, что $\{\tilde{T} f_{t_n}\}$ слабо сходится к некоторой мере μ. Это означает, что

$$\lim_{j \to \infty} \int_{T_n} \tilde{T} f_{t_j}(x) g(x)\, dx = \int_{T_n} g(x)\, d\mu(x)$$

для всех $g \in C(T_n)$. Тогда $\|d\mu\| \leqslant A$. В частности,

$$\lambda(m) = \lim_{j \to \infty} \int_{T_n} e^{-2\pi i m \cdot x} \tilde{T} f_{t_j}(x)\, dx = \int_{T_n} e^{-2\pi i m \cdot x} d\mu(x).$$

Следовательно,

$$d\mu \sim \sum_{m \in \Lambda} \lambda(m)\, e^{2\pi i m \cdot x}.$$

Обратное немедленно следует из определения оператора свертки (см. (1.6) и последующее обсуждение).

Установив эти предварительные результаты, обратимся к главному вопросу этого параграфа. Пусть T принадлежит $(L^p(E_n), L^p(E_n))$. Выше было отмечено, что T можно реализовать при помощи ограниченной измеримой функции — мультипликатора $\hat{u}$. В общем случае $\hat{u}$ не является непрерывной и, следовательно, не обязана быть определенной в точках решетки Λ. Предположим, однако, что $\hat{u}$ непрерывна в точках решетки Λ, так что $\lambda(m) = \hat{u}(m)$ определена на Λ. Тогда можно спросить: является ли $\{\lambda(m)\}$ мультипликатором в классе $(L^p(T_n), L^p(T_n))$? Если это имеет место, то будем говорить, что соответствующий оператор $\tilde{T}$ на n-мерном торе получен из оператора T путем *периодизации*.

Прежде чем сформулировать общую теорему, рассмотрим несколько более простых частных случаев. Когда $p = 2$, из условия, что $\hat{u}$ ограничена на E_n и непрерывна в точках решетки Λ, следует, что $\sup_{m \in \Lambda} |\hat{u}(m)| = \sup_{m \in \Lambda} |\lambda(m)| < \infty$. Тогда, в силу следствия 3.3, периодизированный оператор принадлежит $(L^2(T_n), L^2(T_n))$.

В случае $p = 1$ известно, что $\hat{u}(x) = \hat{\mu}(x)$, где $\hat{\mu}$ — преобразование Фурье меры $\mu \in \mathscr{B}(E_n)$ (см. теорему 3.19 гл. I). Утверждение о том, что соответствующий периодизированный оператор принадлежит $(L^1(T_n), L^1(T_n))$, вытекает тогда из предложения 3.4 и следующего замечания (которое можно рассматривать как еще один вариант формулы суммирования Пуассона):

Теорема 3.6. *Пусть $\mu \in \mathscr{B}(E_n)$ и $\hat{\mu}$ — ее преобразование Фурье. Тогда $\sum_{m \in \Lambda} \hat{\mu}(m) e^{2\pi i m \cdot x}$ — ряд Фурье меры $\tilde{\mu}$ на T_n; кроме того, $\|d\tilde{\mu}\| \leqslant \|d\mu\|$.*

Доказательство. Рассмотрим линейный функционал, отображающий $f \in C(T_n)$ в $\int_{E_n} f(x)\, d\mu(x)$ (символ f используется также и для обозначения периодического продолжения функции f). Согласно теореме Рисса, этот функционал можно записать в виде

$$\int_{E_n} f(x)\, d\mu(x) = \int_{T_n} f(x)\, d\tilde{\mu}(x), \tag{3.7}$$

где $\tilde{\mu}$ — некоторая мера из $\mathscr{B}(T_n)$. Применяя теперь равенство (3.7) к $f(x) = e^{-2\pi i m \cdot x}$, $m \in \Lambda$, получим теорему 3.6.

Заметим, что из равенства (3.7) следует, что для любого борелевского множества $E \subset Q_n$ имеем $\tilde{\mu}(E) = \sum_{m \in \Lambda} \mu(E + m)$. Таким образом, мера $\tilde{\mu}$ получается из μ с помощью метода периодизации, подобного тому, который мы ввели для функций (см. (2.1) и последующее обсуждение).

Основной результат этого параграфа можно сформулировать в следующем виде:

Теорема 3.8. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $T \in (L^p(E_n), L^p(E_n))$. Пусть $\hat{u}$ — мультипликатор, соответствующий оператору T, и пусть $\hat{u}$ непрерывна в каждой точке решетки Λ. Положим $\lambda(m) = \hat{u}(m)$ для $m \in \Lambda$. Тогда существует единственный периодизированный оператор $\tilde{T}$, определяемый формулой (3.2) и такой, что $\tilde{T} \in (L^p(T_n), L^p(T_n))$ и $\|\tilde{T}\| \leqslant \|T\|$.*

Начнем доказательство с установления двух лемм.

Лемма 3.9. *Пусть f — непрерывная периодическая функция на E_n; тогда*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{n/2} \int_{E_n} f(x)\, e^{-\varepsilon\pi|x|^2}\, dx = \int_{Q_n} f(x)\, dx. \tag{3.10}$$

Доказательство. Равенство (3.10) очевидно, когда $f(x)=e^{2\pi i m\cdot x}$, поскольку (см. (1.13) гл. I)

$$\varepsilon^{n/2}\int\limits_{E_n} e^{2\pi i m\cdot x}\, e^{-\varepsilon\pi|x|^2}\,dx = e^{-\pi|m|^2/\varepsilon}$$

для $\varepsilon>0$ и $m\in\Lambda$. Следовательно, равенство (3.10) справедливо для всех тригонометрических полиномов. Произвольную непрерывную периодическую функцию можно равномерно на Q_n приблизить такими полиномами. Отсюда следует утверждение леммы.

Вторая лемма, которая служит основным средством при доказательстве теоремы 3.8, такова:

Лемма 3.11. *Пусть P и Q — тригонометрические полиномы, $T\in(L^p(E_n),\ L^p(E_n))$, $\tilde T$ определен на классе тригонометрических полиномов формулой* (3.2) *и $w_\delta(y)=e^{-\pi\delta|y|^2}$ для $\delta>0$, $y\in E_n$. Тогда*

$$(3.12)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\ \varepsilon^{n/2}\int\limits_{E_n} T(Pw_{\varepsilon\alpha})(x)\,\overline{Q(x)}\,w_{\varepsilon\beta}(x)\,dx=\int\limits_{Q_n}(\tilde T P)(x)\,\overline{Q(x)}\,dx$$

для всех $\alpha,\ \beta>0$ и $\alpha+\beta=1$.

Доказательство. Поскольку полиномы P и Q входят в равенство (3.12) линейно, достаточно доказать (3.12) для случая, когда $P(x)=e^{2\pi i m\cdot x}$ и $Q(x)=e^{2\pi i k\cdot x}$, $m,\ k\in\Lambda$. В силу теоремы Планшереля и определения мультипликатора $\hat u$, интеграл слева равен $\varepsilon^{n/2}\int\limits_{E_n}\hat u(x)\,\varphi(x)\,\overline{\psi(x)}\,dx$, где φ и ψ — преобразования Фурье функций $e^{2\pi i m\cdot x}e^{-\pi\varepsilon\alpha|x|^2}$ и $e^{2\pi i k\cdot x}e^{-\pi\varepsilon\beta|x|^2}$. Но, согласно (1.5) и теореме 1.13 гл. I, имеем

$$\varphi(x)=e^{-\pi(|x-m|^2/\alpha\varepsilon)}(\alpha\varepsilon)^{-(n/2)},\quad \psi(x)=e^{-\pi(|x-k|^2/\beta\varepsilon)}(\beta\varepsilon)^{-(n/2)}.$$

Предположим теперь, что $m\neq k$ и, следовательно, $|m-k|\geqslant 1$. Поскольку $|\hat u(x)|\leqslant A$ для подходящей постоянной A, левая часть равенства (3.12) не превосходит

$$\varepsilon^{n/2}A\int\limits_{E_n} e^{-(|x-m|^2/\alpha\varepsilon)\pi}\,(\alpha\varepsilon)^{-(n/2)}e^{-(|x-k|^2/\beta\varepsilon)\pi}\,(\beta\varepsilon)^{-(n/2)}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon^{n/2}A\Bigg[\int\limits_{|x-m|\geqslant 1/2}+\int\limits_{|x-k|\geqslant 1/2}\Bigg].$$

В интеграле по множеству $\{x\in E_n;\ \ |x-m|\geqslant 1/2\}$ множитель $\varepsilon^{n/2}e^{-(|x-m|^2/\alpha\varepsilon)\pi}(\alpha\varepsilon)^{-(n/2)}$ равномерно стремится к 0 при $\varepsilon\to 0$, в

то время как множитель $e^{-(|x-k|^2/\beta\varepsilon)\pi}(\beta\varepsilon)^{-(n/2)}$ имеет общий интеграл по E_n, равный 1. Поэтому $\varepsilon^{n/2}\int\limits_{|x-m|\geqslant 1/2}$ стремится к 0 вместе с ε. Аналогичное рассуждение с заменой m на k показывает, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{n/2}\int\limits_{|x-k|\geqslant 1/2} = 0$. Поскольку для $m\neq k$

$$\int\limits_{T_n}(\tilde{T}P)(x)\overline{Q(x)}\,dx=\int\limits_{Q_n}\lambda(m)\,e^{2\pi i m\cdot x}e^{-2\pi i k\cdot x}\,dx=0,$$

равенство (3.12) для этого случая установлено.

В случае $m = k$ левая часть (3.12) равна

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\alpha\beta)^{-(n/2)}\int\limits_{E_n}\hat{u}(x)\,e^{-\pi(|x-m|^2/\varepsilon)(1/\alpha+1/\beta)}\,dx. \tag{3.13}$$

Поскольку $1/\alpha+1/\beta=1/\alpha\beta$, выражение (3.13) равно пределу при $\varepsilon\to 0$ интеграла Гаусса — Вейерштрасса функции $\hat{u}$. Согласно теореме 1.25 гл. I, этот предел равен $\hat{u}(m)$, когда m принадлежит лебегову множеству функции $\hat{u}$. Но это так, поскольку $\hat{u}$ по условию непрерывна в точке m. Это доказывает равенство (3.12), когда $P(x)=e^{2\pi i m\cdot x}=Q(x)$ (так как в этом случае $\int\limits_{T_n}(\tilde{T}P)(x)\overline{Q(x)}\,dx=\lambda(m)$), и лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3.8. Во избежание некоторых технических трудностей временно предположим, что $1<p<\infty$. Пусть q — показатель, сопряженный с p; тогда $1/p+1/q=1$ и $1<q<\infty$. Докажем сначала, что существует постоянная $A\leqslant\|T\|$, такая, что

$$\left(\int\limits_{Q_n}|(\tilde{T}P)(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant A\left(\int\limits_{Q_n}|P(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \tag{3.14}$$

для всех тригонометрических полиномов P. Если Q — также тригонометрический полином, то

$$\left|\int\limits_{E_n}(T(Pw_{\varepsilon\alpha}))(x)\,\overline{Q(x)}\,w_{\varepsilon\beta}(x)\,dx\right|\leqslant\|T\|\,\|Pw_{\varepsilon\alpha}\|_p\,\|Qw_{\varepsilon\beta}\|_q, \tag{3.15}$$

где нормы берутся по отношению к E_n, а w_δ, $\delta>0$, — функция, введенная в лемме 3.11. Положим $\alpha=1/p$, $\beta=1/q$, умножим обе части равенства (3.15) на $\varepsilon^{n/2}$ и устремим $\varepsilon\to 0$. В силу леммы 3.11, левая часть сходится к $\int\limits_{Q_n}(\tilde{T}P)(x)\,\overline{Q(x)}\,dx$.

С другой стороны, согласно лемме 3.9,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{n/2} \|Pw_{\varepsilon/p}\|_p \|Qw_{\varepsilon/q}\|_q =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\varepsilon^{n/2}\int_{E_n} |P(x)|^p e^{-\varepsilon\pi|x|^2}\,dx\Big]^{1/p}\Big[\varepsilon^{n/2}\int_{E_n} |Q(x)|^q e^{-\varepsilon\pi|x|^2}\,dx\Big]^{1/q} =$$

$$= \Big[\int_{Q_n} |P(x)|^p\,dx\Big]^{1/p}\Big[\int_{Q_n} |Q(x)|^q\,dx\Big]^{1/q}.$$

Комбинируя это равенство с неравенством (3.15), получим

$$\Big|\int_{Q_n} (\tilde{T}P)(x)\,\overline{Q(x)}\,dx\Big| \leqslant \|T\| \Big(\int_{Q_n} |P(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} \Big(\int_{Q_n} |Q(x)|^q\,dx\Big)^{1/q}.$$

Наконец, беря верхнюю грань по всем полиномам Q, таким, что $\int_{Q_n} |Q(x)|^q\,dx \leqslant 1$, получим (3.14). Это показывает, что сужение $\tilde{T}$ на тригонометрические полиномы является ограниченным оператором с $L^p(T_n)$-нормой, не превосходящей $\|T\|$. Следовательно, это сужение имеет единственное ограниченное расширение на все пространство $L^p(T_n)$, причем это расширение удовлетворяет всем утверждениям теоремы 3.8.

Перейдем теперь к случаям $p = 1$ и $p = \infty$. Эти крайние случаи на самом деле намного проще только что рассмотренного общего случая. Результат для $p = 1$ (как уже было указано) непосредственно следует из теоремы 3.19 гл. I и теорем 3.4 и 3.6 данной главы. В случае $p = \infty$ рассуждаем следующим образом. Согласно теореме 3.20 гл. I, если $T \in (L^\infty(E_n), L^\infty(E_n))$, то $T \in (L^1(E_n), L^1(E_n))$; более того, из доказательства теоремы 3.20 следует, что норма T как оператора на $L^1(E_n)$ не превосходит его нормы как оператора на $L^\infty(E_n)$. Отсюда, в силу только что установленного случая для $p = 1$, имеем $\tilde{T} \in (L^1(T_n), L^1(T_n))$, и, согласно (3.4), существует конечная борелевская мера μ на T_n, такая, что $\|d\mu\| = \|\tilde{T}\|$ и $\tilde{T}f = f * d\mu$. Однако для $f \in L^\infty(T_n)$ имеем $\|f * d\mu\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|d\mu\|$, и теорема доказана и для этого случая.

Следствие 3.16. *Утверждения теоремы 3.8 останутся справедливыми, если условие непрерывности $\hat{u}$ в точках решетки Λ заменить условием*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-n} \int_{|t|\leqslant\varepsilon} [\hat{u}(m-t) - \hat{u}(m)]\,dt = 0 \tag{3.17}$$

для всех $m \in \Lambda$.

Действительно, условия (3.17) достаточно для того, чтобы предел (3.13) существовал и был равен $\hat{u}(m)$ (см. (4.10) в гл. I).

Важный класс таких преобразований множителей порождают сингулярные интегральные операторы, изученные в предыдущей главе. Там было показано (см. также теорему 4.7, следствие 4.12 и п. 5.10 гл. IV), что мультипликатор Ω_0, соответствующий сингулярному интегральному оператору T, есть однородная функция степени 0, непрерывная на единичной сфере (и, следовательно, непрерывная всюду, кроме 0) и, кроме того, удовлетворяющая равенству $\int\limits_{\Sigma_{n-1}} \Omega_0(x')\,dx' = 0$. Если положить $\hat{u}(x) = \Omega_0(x)$ для $x \neq 0$ и $\hat{u}(0) = 0$, то условие (3.17) следствия 3.16 будет выполнено. Значит, оператор $\tilde{T}$, определяемый формулой

$$(\tilde{T} f)(x) \sim \sum_{m \neq 0} \Omega_0(m)\, a_m e^{2\pi i m \cdot x},$$

где

$$f(x) \sim \sum_{m \in \Lambda} a_m e^{2\pi i m \cdot x},$$

принадлежит классу $(L^p(T_n),\ L^p(T_n))$ для $1 < p < \infty$. Заслуживающий внимания пример возникает, когда $\Omega_0(x) = P^{(k)}(x)/|x|^k$, где $P^{(k)}$ — гармонический многочлен на E_n, однородный степени $k \geqslant 1$ (см. теорему 4.5 гл. IV). Частные случаи $\Omega_0(x) = -ix_j/|x|$, $j = 1, \ldots, n$, известны как *периодические преобразования Рисса* (см. (2.7) гл. VI).

Покажем теперь, что теорема 3.8 допускает обращение. Пусть λ — непрерывная функция на E_n и семейство $\{\lambda(m)\}$, $m \in \Lambda$, является мультипликатором для некоторого оператора из $(L^p(T_n),\ L^p(T_n))$. Можно ли отсюда заключить, что λ является мультипликатором для некоторого оператора из $(L^p(E_n),\ L^p(E_n))$? Легко видеть, что это неверно, поскольку сделанное предположение о функции λ затрагивает только точки решетки Λ, в то время как для ответа на поставленный вопрос важно знать поведение λ на всем E_n. Для формулировки содержательного обратного утверждения заметим, что если λ — мультипликатор для некоторого оператора T из $(L^p(E_n),\ L^p(E_n))$, то для каждого $\varepsilon > 0$ функция $\lambda(\varepsilon x)$ также будет мультипликатором для некоторого оператора T_ε из $(L^p(E_n),\ L^p(E_n))$ с нормой, зависящей только от λ и не зависящей от ε. Действительно, $(Tf)\hat{}\,(x) = \lambda(x)\hat{f}(x)$ для всех $f \in \mathscr{S}$. Поэтому если мы положим оператор T_ε равным $\delta_\varepsilon^{-1} T \delta_\varepsilon$ (δ_ε — оператор растяжения, введенный перед (1.6)

гл. I), то получим опять оператор с мультипликатором, равным $\lambda(\varepsilon x)$. Более того, поскольку $\|\delta_\varepsilon f\|_p = \varepsilon^{-n/p}\|f\|_p$ и $\|\delta_\varepsilon^{-1} f\|_p = \varepsilon^{n/p}\|f\|_p$, то $\|T_\varepsilon\| = \|T\|$. После этого замечания не удивительно, что обращение теоремы 3.8 имеет следующий вид:

Теорема 3.18. *Пусть λ — непрерывная функция на E_n. Предположим, что для каждого $\varepsilon > 0$ определен оператор $\tilde{T}_\varepsilon \in (L^p(T_n), L^p(T_n))$, такой, что*

$$(3.19)\qquad (\tilde{T}_\varepsilon f)(x) \sim \sum_{m\in\Lambda} \lambda(\varepsilon m)\, a_m e^{2\pi i m\cdot x},$$

где $\{a_m\}$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L^p(T_n)$. Предположим еще, что нормы $\|\tilde{T}_\varepsilon\|$ операторов $\tilde{T}_\varepsilon$ равномерно ограничены. Тогда λ — мультипликатор для некоторого оператора T из $(L^p(E_n), L^p(E_n))$, такого, что $\|T\|$ не превосходит $\sup_{\varepsilon>0} \|\tilde{T}_\varepsilon\|$.

Доказательство. Избавимся сначала от случая $p = \infty$, показав, что он сводится к случаю $p = 1$. Действительно, из (3.19) немедленно вытекает двойственное тождество

$$(3.20)\qquad \int_{T_n} (\tilde{T}_\varepsilon f)(x)\, g(-x)\, dx = \int_{T_n} (\tilde{T}_\varepsilon g)(x)\, f(-x)\, dx,$$

если f и g — (например) тригонометрические полиномы. Отсюда следует (см. аналогичные рассуждения при доказательстве теоремы 3.20 гл. I), что $\|\tilde{T}_\varepsilon\|_1 \leqslant \|\tilde{T}_\varepsilon\|_\infty$ (имеются в виду нормы оператора $\tilde{T}_\varepsilon$ на $L^1(T_n)$ и $L^\infty(T_n)$ соответственно). Таким образом, если будет доказан случай $p = 1$ этой теоремы, то мы получим оператор $T \in (L^1(E_n), L^1(E_n))$ с мультипликатором λ, такой, что $\|T\|_1 \leqslant \sup_{\varepsilon>0} \|\tilde{T}_\varepsilon\|_1 \leqslant \sup_{\varepsilon>0} \|\tilde{T}_\varepsilon\|_\infty$. Наконец, опять обращаясь к теореме 3.20 гл. I, найдем, что $T \in (L^\infty(E_n), L^\infty(E_n))$ и $\|T\|_\infty \leqslant \sup_{\varepsilon>0} \|\tilde{T}_\varepsilon\|_\infty$.

Итак, предполагая, что $1 \leqslant p < \infty$, используем следующее удобное для нас разбиение единицы:

Лемма 3.21. *Существует непрерывная неотрицательная функция η с компактным носителем в E_n, такая, что*

(a) $\eta(0) = 1$,

(b) $\sum_{m\in\Lambda} [\eta(x+m)]^p \equiv 1$.

Для доказательства этой леммы выберем произвольную непрерывную неотрицательную функцию η_1 с компактным носителем

лем в E_n, такую, что $\eta_1(0)=1$, $\eta_1(m)=0$ при $m\in\Lambda\setminus\{0\}$ и $\eta(x)>0$ для $x\in\overline{Q}_n$. Положим $\eta_2(x)=\eta_1(x)/\sum\limits_{m\in\Lambda}\eta_1(x+m)$. Тогда ясно, что $\eta_2(0)=1$ и $\sum\limits_{m\in\Lambda}\eta_2(x+m)\equiv 1$. Осталось только взять $\eta=\eta_2^{1/p}$.

Обратимся теперь к доказательству теоремы. Предположим для простоты, что $\|\tilde{T}_\varepsilon\|_p\leqslant 1$, $\varepsilon>0$. Тогда $|\lambda(\varepsilon m)|\leqslant 1$ для $m\in\Lambda$ и $\varepsilon>0$ (см. доказательство теоремы 3.1). Поскольку множество $\{\varepsilon m;\ \varepsilon>0,\ m\in\Lambda\}$ плотно в E_n, функция λ ограничена. Следовательно, если $f\in L^2(E_n)$, то $\lambda\hat{f}$ также принадлежит $L^2(E_n)$, так что последняя функция является преобразованием Фурье некоторой функции из $L^2(E_n)$. В частности, это позволяет определить Tf для $f\in\mathcal{D}\ (\subset\mathcal{S})$ как функцию, преобразование Фурье которой равно $\lambda\hat{f}$, т. е. $(Tf)^\wedge(x)=\lambda(x)\hat{f}(x)$. Покажем, что

$$\|Tf\|_p\leqslant\|f\|_p. \tag{3.22}$$

Для этого определим $\tilde{f}_\varepsilon$ для $\varepsilon>0$ как растянутую и периодизированную функцию f, а именно

$$\tilde{f}_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\sum_{m\in\Lambda}f\left(\frac{x+m}{\varepsilon}\right).$$

При этом, используя формулу суммирования Пуассона (2.7), получим

$$\tilde{f}_\varepsilon(x)=\sum_{m\in\Lambda}\hat{f}(\varepsilon m)\,e^{2\pi i m\cdot x}. \tag{3.23}$$

Мы теперь утверждаем, что для каждого $x\in E_n$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^n[\tilde{T}_\varepsilon\tilde{f}_\varepsilon](\varepsilon x)=[Tf](x). \tag{3.24}$$

Из (3.19) и (3.23) имеем

$$\varepsilon^n[\tilde{T}_\varepsilon\tilde{f}_\varepsilon](\varepsilon x)=\varepsilon^n\sum_{m\in\Lambda}\lambda(\varepsilon m)\,\hat{f}(\varepsilon m)\,e^{2\pi i\varepsilon m\cdot x}. \tag{3.25}$$

Но функция λ ограничена, а $\hat{f}$ быстро убывает на ∞ (т. е. $\lim\limits_{|x|\to\infty}|x|^k|\hat{f}(x)|=0$ для всех положительных целых k), причем обе эти функции непрерывны. Следовательно, по определению интеграла Римана правая часть равенства (3.25) стремится к

$$\int_{E_n}\lambda(t)\,\hat{f}(t)\,e^{2\pi i x\cdot t}\,dt=(Tf)(x)$$

при $\varepsilon\to 0$ (см. следствие 1.21 гл. I). Итак, равенство (3.24) установлено. Более того, поскольку функция η непрерывна и $\eta(0)=1$,

то справедливо также равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^n [\tilde{T}_\varepsilon \tilde{f}_\varepsilon] (\varepsilon x)\, \eta(\varepsilon x) = (Tf)(x) \tag{3.26}$$

для каждого $x \in E_n$.

В силу периодичности $\tilde{T}_\varepsilon \tilde{f}_\varepsilon$, имеем

$$\varepsilon^{np} \int_{E_n} |(\tilde{T}_\varepsilon \tilde{f}_\varepsilon)(\varepsilon x)\, \eta(\varepsilon x)|^p\, dx = \varepsilon^{np-n} \int_{E_n} |(\tilde{T}_\varepsilon \tilde{f}_\varepsilon)(x)|^p\, [\eta(x)]^p\, dx =$$
$$= \varepsilon^{np-n} \sum_{m\in\Lambda} \int_{Q_n} |(\tilde{T}_\varepsilon \tilde{f}_\varepsilon)(x)|^p\, [\eta(x+m)]^p\, dx.$$

Отсюда, согласно лемме 3.21 и предположению $\|\tilde{T}_\varepsilon\|_p \leqslant 1$, получаем

$$\int_{E_n} |\varepsilon^n (\tilde{T}_\varepsilon \tilde{f}_\varepsilon)(\varepsilon x)\, \eta(\varepsilon x)|^p\, dx \leqslant \varepsilon^{np-n} \int_{Q_n} |\tilde{f}_\varepsilon(x)|^p\, dx. \tag{3.27}$$

Для достаточно малых ε носитель функции $\varepsilon^{-n} f(x/\varepsilon)$ целиком лежит в Q_n, и в этом случае $\varepsilon^{-n} f(x/\varepsilon) = \tilde{f}_\varepsilon(x)$ для $x \in Q_n$. Таким образом, для малых ε правая часть (3.27) равна

$$\varepsilon^{np-n} \int_{Q_n} |\varepsilon^{-n} f(x/\varepsilon)|^p\, dx = \varepsilon^{np-n} \int_{E_n} |\varepsilon^{-n} f(x/\varepsilon)|^p\, dx = \int_{E_n} |f(x)|^p\, dx.$$

Применяя теперь к левой части (3.27) равенство (3.26) и лемму Фату, получим

$$\int_{E_n} |(Tf)(x)|^p\, dx \leqslant \int_{E_n} |f(x)|^p\, dx,$$

т. е. требуемое неравенство (3.22). Поскольку класс $\mathcal{D}$ плотен в $L^p(E_n)$, $1 \leqslant p < \infty$, тем самым теорема доказана.

Теорема 3.18, предшествующие ей замечания и теорема 3.8 имеют следующее очевидное

Следствие 3.28. $\sup\limits_{\varepsilon>0} \|\tilde{T}_\varepsilon\| = \|T\|$, *где* $\|\tilde{T}_\varepsilon\|$ *и* $\|T\|$ *обозначают нормы операторов* $\tilde{T}_\varepsilon$ *и* T, *фигурирующих в теореме* 3.8.

4. Суммируемость ниже критического показателя (отрицательные результаты)

Пусть $\sum\limits_{m\in\Lambda} a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ — ряд Фурье интегрируемой функции f. Из леммы 2.16 следует, что равенство

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{|m|<R} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^\alpha a_m e^{2\pi i m\cdot x} = f(x) \tag{4.1}$$

справедливо (почти всюду и по L^1-норме), когда α больше критического показателя $(n-1)/2$. Естественно спросить, что будет, если $\alpha \leqslant (n-1)/2$? В этом параграфе мы остановимся в основном на случаях $\alpha=(n-1)/2$ и $\alpha=0$.

В качестве предварительного ознакомления с этим вопросом обратимся к классическим результатам для $n=1$. В этом случае суммируемость с критическим показателем ($\alpha=0$) и обычная сходимость совпадают. Колмогоров показал, что имеется L^1-функция, для которой предел (4.1) не существует для почти всех x, если $\alpha = 0$. Тем не менее для L^1-функций доказаны результаты о локализации, из которых следует, что равенство (4.1) выполняется для данного x, если f достаточно регулярна в произвольно малой окрестности точки x. Для функции f из $L^p(T_1)$, $p>1$, имеется результат Карлесона и Ханта, который показывает, что ряд Фурье функции f сходится к $f(x)$ почти всюду. Имеется также более ранний результат М. Рисса, показывающий, что сходимость по норме имеет место при $1<p<\infty$.

Сейчас мы увидим, что при $n>1$ ситуация сильно отличается от описанной. Это ясно из следующих трех утверждений.

Теорема 4.2. *Существует функция $f \in L^1(T_n)$, $n>1$, такая, что*

$$\limsup_{R\to\infty}\left|\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^{(n-1)/2} a_m e^{2\pi i m\cdot x}\right| = \infty$$

для почти всех x. Эту функцию f можно построить так, что ее носитель будет лежать в заданной произвольно малой окрестности 0[1].

Теорема 4.3. *Тригонометрический ряд*

$$\sum_{m\neq 0} |m|^{-(n/2)+1/2} e^{2\pi i m\cdot x} \tag{4.4}$$

расходится почти всюду. Точнее,

$$\limsup_{R\to\infty}\left|\sum_{0<|m|<R} |m|^{-(n/2)+1/2} e^{2\pi i m\cdot x}\right| = \infty$$

для почти всех $x \in Q_n$.

Из теоремы 2.17 известно, что ряд (4.4) есть ряд Фурье функции $\gamma_{(n-1)/2}^{-1}|x|^{-(n+1)/2}+b(x)$, где $b\in C^\infty(Q_n)$. Отсюда вытекает такое

Следствие 4.5. *Существует функция из $L^p(T_n)$, $p<2n/(n+1)$, ряд Фурье которой расходится почти всюду.*

Таким образом, для произвольной функции из $L^p(T_n)$, $p<2$, сходимость почти всюду не имеет места, если размерность n по-

[1] Эта теорема одновременно показывает, что ни суммируемость почти всюду, ни локализация не могут иметь места при критическом показателе.

статочно велика. Вопрос о том, что происходит при $p=2$, остается открытым.

Приведенные три утверждения основаны на следующей лемме:

Лемма 4.6. *Если $n>1$, то*

$$\limsup_{R\to\infty}\left|\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^{(n-1)/2} e^{2\pi i m\cdot x}\right| = \infty \tag{4.7}$$

для почти всех $x \in Q_n$.

Разобьем доказательство леммы 4.6 на несколько шагов. Для этого положим

$$K_R^\alpha(x) = \sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^\alpha e^{2\pi i m\cdot x}$$

и будем иногда писать K_R вместо $K_R^{(n-1)/2}$. Первый шаг составляет следующая

Лемма 4.8. *Пусть x^0 — такая точка, что*

$$\limsup_{R\to\infty}\left|\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^{(n-1)/2} e^{2\pi i m\cdot x^0}\right| < \infty;$$

тогда

$$\sup_{\alpha>(n-1)/2}\ \sup_{R>0}\left|\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^\alpha e^{2\pi i m\cdot x^0}\right| < \infty. \tag{4.9}$$

Эта простая лемма полезна потому, что она позволяет свести доказательство к случаю $\alpha>(n-1)/2$, где непосредственно применима формула суммирования Пуассона.

Доказательство леммы начнем с замечания, что из тождества [1]

$$t^{\delta+\beta} = \frac{\Gamma(\delta+\beta+1)}{\Gamma(\delta+1)\,\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}s^\delta\,ds$$

путем замены переменных $s=r^2-|m|^2$ получаем

$$\int_{|m|}^R (R^2-r^2)^{\beta-1}\left(1-\frac{|m|^2}{r^2}\right)^{(n-1)/2} r^n\,dr =$$

$$= \int_{|m|}^R (R^2-r^2)^{\beta-1}(r^2-|m|^2)^{(n-1)/2}r\,dr =$$

$$= \frac{R^{2\beta+n-1}\,\Gamma[(n+1)/2]\,\Gamma(\beta)}{2\Gamma[(n+1)/2+\beta]}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^{\beta+(n-1)/2}.$$

---

[1] Это тождество получается с помощью замены переменных из широко известного соотношения между бета- и гамма-функциями:

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \Gamma(x)\,\Gamma(y)/\Gamma(x+y).$$

Положив

$$\beta = \alpha - \frac{n-1}{2} > 0, \quad c_\alpha = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma[(n+1)/2]\,\Gamma(\beta)}$$

и поменяв порядок интегрирования и суммирования, получим

$$K_R^\alpha(x) = \sum_{|m|<R}\left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^\alpha e^{2\pi i m\cdot x} =$$

$$= \sum_{|m|<R}\left\{c_\alpha R^{-2\alpha}\int_{|m|}^{R}(R^2-r^2)^{\beta-1}\left(1-\frac{|m|^2}{r^2}\right)^{(n-1)/2} r^n dr\right\} e^{2\pi i m\cdot x} =$$

$$= c_\alpha R^{-2\alpha}\int_0^R\left\{\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{r^2}\right)^{(n-1)/2} e^{2\pi i m\cdot x}\right\}(R^2-r^2)^{\beta-1}r^n dr,$$

т. е.

(4.10) $$K_R^\alpha(x) = c_\alpha R^{-2\alpha}\int_0^R K_r(x)\,(R^2-r^2)^{\beta-1}r^n dr.$$

Далее, если $\limsup\limits_{R\to\infty}|K_R(x^0)| < \infty$, то $\sup\limits_{R>0}|K_R(x^0)| = A < \infty$. Тогда, в силу (4.10),

$$|K_R^\alpha(x^0)| \leqslant A\left\{c_\alpha R^{-2\alpha}\int_0^R (R^2-r^2)^{\beta-1}r^n dr\right\}.$$

Однако последнее выражение в скобках тождественно равно единице (в этом легко убедиться, рассмотрев постоянный член в (4.10)). Итак,

$$\sup_{\alpha>(n-1)/2}\ \sup_{R>0}|K_R^\alpha(x^0)| \leqslant \sup_{R>0}|K_R(x^0)|,$$

и лемма 4.8 доказана.

Опишем теперь множество S, состоящее из точек, для которых (как мы утверждаем) справедливо равенство 4.7. Пусть S — множество точек x, таких, что счетное множество вещественных чисел $\{|x-m|;\ m\in\Lambda\}$ линейно независимо над полем рациональных чисел. В одномерном случае S, очевидно, пусто, однако, как будет показано, при $n>1$ дополнение к S имеет меру 0.

Лемма 4.11. *Пусть $x^0\in S$; тогда*

$$\limsup_{R\to\infty}\left|\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^{(n-1)/2} e^{2\pi i m\cdot x^0}\right| = \infty.$$

Доказательство. Если $\alpha > (n-1)/2$, то в силу замечаний, предшествующих (2.14), можно применить формулу суммирования Пуассона и получить равенство

(4.12) $$K_R^\alpha(x) = \\ = \pi^{-\alpha}\Gamma(\alpha+1) R^{(n/2)-\alpha} \sum_{m\in\Lambda} J_{(n/2)+\alpha}(2\pi R|x-m|)/|x-m|^{(n/2)+\alpha}.$$

Используя неравенства

$$\left| |x^0-m|^{-\alpha+(n+1)/2} - |m|^{-\alpha+(n+1)/2} \right| \leqslant A|m|^{-\alpha+(n+3)/2},$$

$$\sum_{|m|>0} |m|^{-n-1} < \infty$$

и асимптотические оценки для функций Бесселя из леммы 3.11 гл. IV (см. также приведенное там примечание), получим для $x^0 \notin \Lambda$

(4.13) $$K_R^\alpha(x^0) = c_\alpha R^{(n-1)/2-\alpha} \sum_{m\neq 0} \frac{\cos(2\pi R\gamma_m + \delta_m)}{|m|^{\alpha+(n+1)/2}} + E(R, \alpha),$$

где $\gamma_m = |x^0 - m|$ и $\sup\limits_{\alpha>(n-1)/2} \sup\limits_{R\geqslant 1} |E(R, \alpha)| < \infty$.

Из предположения $\varlimsup\limits_{R\to\infty} |K_R(x^0)| < \infty$ следует, что $\sup\limits_{\alpha>(n-1)/2} \sup\limits_{R\geqslant 1} |K_R^\alpha(x^0)| < \infty$ (см. лемму 4.8). Последнее неравенство вместе с (4.13) дает

(4.14) $$\sup_{\alpha>(n-1)/2} \sup_{R\geqslant 1} \left| \sum_{|m|\neq 0} \frac{\cos(2\pi R\gamma_m + \delta_m)}{|m|^{\alpha+(n+1)/2}} \right| < \infty.$$

Следующая лемма утверждает, что неравенство (4.14) несправедливо, если $x^0 \in S$.

Лемма 4.15. *Пусть $\{a_m\}$, $\{\gamma_m\}$ и $\{\delta_m\}$ — вещественные последовательности, причем числа γ_m линейно независимы над полем рациональных чисел и $\sum\limits_{m\in\Lambda} |a_m| < \infty$. Тогда*

(4.16) $$\sup_{R\geqslant 1} \left| \sum_{m\in\Lambda} a_m \cos(2\pi R\gamma_m + \delta_m) \right| = \sum_{m\in\Lambda} |a_m|.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\sum\limits_{|m|>M} |a_m| \leqslant \varepsilon$. Согласно теореме Кронекера (см. теорему 444 в «Теории чисел» Харди и Райта [1], стр. 380), существует достаточно большое R, такое, что все числа $\cos(2\pi R\gamma_m + \delta_m)$, $|m| \leqslant M$, будут сколь угодно близки к $+1$ или -1 (выбор $+1$ или -1 определяется знаком a_m). Следовательно,

$$\sup_{R\geqslant 1} \left| \sum_{|m|\leqslant M} a_m \cos(2\pi R\gamma_m + \delta_m) \right| = \sum_{|m|\leqslant M} |a_m|.$$

Отсюда
$$\sup_{R\geqslant 1}\Big|\sum_{m\in\Lambda} a_m\cos(2\pi R\gamma_m+\delta_m)\Big|\geqslant\sum|a_m^-|-2\varepsilon.$$
Это доказывает равенство (4.16) и лемму.

Поскольку $\sum\limits_{m\neq 0}|m|^{-n}=\infty$, эта лемма показывает, что (4.14) не может выполняться для $x\in S$. Следовательно, лемма 4.11 установлена, и для завершения доказательства основной леммы 4.6 осталось только доказать следующий результат:

Лемма 4.17. *Если $n>1$, то дополнение к S имеет меру* 0.

Доказательство. Пусть $a_{m_1}, \ldots, a_{m_k}$ — ненулевые рациональные числа (ассоциированные с точками решетки $m_1, \ldots$ $\ldots, m_k$). Положим
$$\Phi(x)=\sum_{j=1}^{k}a_{m_j}|x-m_j|.$$
Тогда $\Phi(x)\not\equiv 0$, поскольку Φ' имеет особенности в точках m_j, $j=1, \ldots, k$. Более того, Φ вещественно аналитична на связном множестве $E_n\diagdown\Lambda$. Но ненулевая вещественно-аналитическая функция может обращаться в 0 только на множестве нулевой лебеговой меры. Таким образом, соотношение
$$\Phi(x)=\sum_{j=1}^{k}a_{m_j}|x-m_j|=0 \tag{4.18}$$
может выполняться только на множестве меры 0. Поскольку имеется только счетное число таких точечных множеств (каждое из них ассоциировано с набором ненулевых рациональных чисел $a_{m_1}, \ldots$ $\ldots, a_{m_k}$), их объединение также имеет меру 0. Но это объединение, очевидно, равно $E_n\diagdown S$ [1]. Это доказывает лемму 4.17.

Посмотрим, чего мы достигли. Пусть μ_0 — мера Дирака; тогда
$$d\mu_0\sim\sum_{m\in\Lambda}e^{2\pi i m\cdot x}.$$
Лемма 4.6, следовательно, показывает, что ряд Фурье — Стилтьеса меры $d\mu_0$ не суммируем по Риссу с критическим показателем для почти всех $x\in Q_n$. Для завершения доказательства теоремы 4.2 следует заменить μ_0 на L^1-функцию с «резким пиком».

Пусть ψ — неотрицательная C^∞-функция на E_n с носителем в единичном шаре $|x|\leqslant 1$, такая, что $\int\limits_{E_n}\psi(x)\,dx=1$. Пусть
$$\Phi(y)=\int\limits_{E_n}\psi(x)\,e^{-2\pi i x\cdot y}\,dx \quad\text{и}\quad \varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\sum_{m\in\Lambda}\psi((x-m)/\varepsilon).$$

---
[1] Читатель заметит, что эти рассуждения несправедливы для $n=1$, поскольку в этом случае Φ состоит из несвязных «кусков» линейных функций, или, другими словами, $E_n\diagdown\Lambda$ несвязно при $n=1$.

Тогда, согласно формуле суммирования Пуассона,

(4.19) $$\varphi_\varepsilon(x) \sim \sum_{m\in\Lambda} \Phi(\varepsilon m)\, e^{2\pi i m\cdot x}.$$

Покажем, что существуют две сходящиеся к 0 последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$ и $\{\delta_k\}$, такие, что функция f, определяемая равенством

(4.20) $$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} (\varphi_{\varepsilon_k}(x) - \varphi_{\delta_k}(x)),$$

принадлежит $L^1(T_n)$ и удовлетворяет теореме 4.2.

Пусть S_R — оператор, определяемый равенством

$$(S_R f)(x) = \sum_{|m|<R} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^{(n-1)/2} a_m e^{2\pi i m\cdot x},$$

когда $f \sim \sum_{m\in\Lambda} a_m e^{2\pi i m\cdot x}$. Заметим сначала, что

(4.21) $$\sup_{0<R} |(S_R\varphi_\varepsilon)(x)| \leqslant A\varepsilon^{-n}.$$

Действительно,

$$\sup_{0<R} |(S_R\varphi_\varepsilon)(x)| \leqslant \sum_{m\in\Lambda} |\Phi(\varepsilon m)| = \sum_{|m|<1/\varepsilon} |\Phi(\varepsilon m)| + \sum_{|m|\geqslant 1/\varepsilon} |\Phi(\varepsilon m)|.$$

Поскольку функции $|\Phi(x)|$ и $|x|^{n+1}|\Phi(x)|$ ограничены, имеем

(i) $$\sum_{|m|<1/\varepsilon} |\Phi(\varepsilon m)| \leqslant \|\Phi\|_\infty \sum_{|m|<1/\varepsilon} 1 = \|\Phi\|_\infty N_\varepsilon,$$

где N_ε — число (не превосходящее некоторой постоянной, умноженной на ε^{-n}) точек решетки, таких, что $|m| < 1/\varepsilon$, и

(ii) $$\sum_{|m|\geqslant 1/\varepsilon} |\Phi(\varepsilon m)| \leqslant \{\sup_{x\in E_n} |x|^{n+1} \Phi(x)\} \sum_{|m|\geqslant 1/\varepsilon} |\varepsilon m|^{-(n+1)} =$$
$$= \{\sup_{x\in E_n} |x|^{n+1} \Phi(x)\}\, \varepsilon^{-n+1} \sum_{|m|\geqslant 1/\varepsilon} |m|^{-(n+1)} \leqslant B\varepsilon^{-n}.$$

Из этих двух неравенств следует (4.21).

Построим также подмножества $\mathcal{E}_k \subset Q_n$ с мерами $|\mathcal{E}_k| \geqslant 1 - 1/k$ и возрастающую последовательность положительных чисел $\{R_k\}$, такие, что

(4.22) $$\sup_{R\leqslant R_k} |(S_R f)(x)| \geqslant k, \text{ если } x \in \mathcal{E}_k.$$

После того как это сделано, легко видеть, что теорема 4.2 уже доказана. Ясно, что первое утверждение теоремы немедленно следует из (4.22). Второе утверждение вытекает из того, что φ_ε на Q_n имеет носитель внутри шара радиуса ε с центром в нуле; следовательно,

вычитая из f частичные суммы ряда (4.20), получим функции, удовлетворяющие первой и второй частям теоремы 4.2.

Предположим теперь, что ε_j, δ_j, R_j и $\mathcal{E}_j$ определены для $1 \leqslant j \leqslant k-1$, и покажем, как тогда следует выбрать ε_k, δ_k, R_k и $\mathcal{E}_k$. Полагаем всегда $\varepsilon_k \leqslant \delta_k$ и выбираем δ_k таким малым, чтобы

$$\sup_{R \leqslant R_{k-1}} |S_R(\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi_{\delta_k})| \leqslant 1. \tag{4.23}$$

Если это можно сделать для всех k, то, конечно, получим

$$\sup_{R \leqslant R_k} |S_R(\varphi_{\varepsilon_{k'}} - \varphi_{\delta_{k'}})| \leqslant 1 \text{ при } k' > k. \tag{4.23'}$$

Поскольку

$$\sup_{R \leqslant R_{k-1}} |S_R(\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi_{\delta_k})| \leqslant \sum_{|m| < R_{k-1}} |\Phi(\varepsilon_k m) - \Phi(\delta_k m)| \leqslant$$
$$\leqslant A(\delta_k - \varepsilon_k) \sum_{|m| < R_{k-1}} |m| \leqslant A' \delta_k (R_{k-1})^{n+1},$$

можно добиться выполнения неравенства (4.23), если δ_k выбрать достаточно малым.

Пусть теперь A_k — положительное число, такое, что

$$A_k \geqslant \sup_{0 < R < \infty} \left\{ \left| S_R \left(\sum_{j<k} 2^{-j} (\varphi_{\varepsilon_j} - \varphi_{\delta_j})(x) - 2^{-k} \varphi_{\delta_k}(x) \right) \right| \right\}. \tag{4.24}$$

В силу неравенства (4.21), такое число существует.

До сих пор были фиксированы A_k и δ_k, а ε_k было ограничено условием $\varepsilon_k \leqslant \delta_k$. Наложим теперь на ε_k условие, которое по существу сводится к тому, что φ_{ε_k} достаточно близко к $d\mu_0$. А именно, уже известно, что если R_k достаточно велико, то, в силу расходимости почти всюду в лемме 4.6,

$$\sup_{R \leqslant R_k} 2^{-k} |(S_R d\mu_0)(x)| > A_k + k + 2 \tag{4.25}$$

на множестве $\mathcal{E}_k \subset Q_n$ меры $|\mathcal{E}_k| \geqslant 1 - 1/k$. Однако ряд Фурье функции φ_ε сходится почленно к ряду Фурье меры $d\mu_0$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, выбрав ε_k достаточно малым, получим

$$\sup_{R \leqslant R_k} 2^{-k} |(S_R \varphi_{\varepsilon_k})(x)| \geqslant A_k + k + 1, \qquad x \in \mathcal{E}_k. \tag{4.26}$$

Таким образом, условия (4.25) и (4.26) определяют наш выбор ε_k, R_k и $\mathcal{E}_k$.

Обратимся теперь к доказательству неравенства (4.22). Напишем

$$f = \left\{ \sum_{j<k} 2^{-j} (\varphi_{\varepsilon_j} - \varphi_{\delta_j}) - 2^{-k} \varphi_{\delta_k} \right\} + 2^{-k} \varphi_{\varepsilon_k} + \left\{ \sum_{j>k} 2^{-j} (\varphi_{\varepsilon_j} - \varphi_{\delta_j}) \right\}.$$

Рассмотрим $\sup\limits_{R\leqslant R_k} |(S_R f)(x)|$ для $x \in \mathscr{E}_k$. Ввиду (4.24), вклад членов в первых скобках не превосходит A_k. В силу (4.26), средний член не превосходит $A_k + k + 1$. Наконец, последний член не превосходит 1 (в силу (4.23)). Это доказывает неравенство (4.22), и теорема 4.2 полностью доказана.

Докажем теперь теорему 4.3. Покажем сначала, что если для некоторого x^0

$$\sup_{0<R<\infty} \left| \sum_{0<|m|<R} |m|^{-(n/2)+1/2} e^{2\pi i m\cdot x^0} \right| < \infty,$$

то

$$\sup_{0<R<\infty} R^{-(n/2)+1/2} \left| \sum_{0<|m|<R} e^{2\pi i m\cdot x^0} \right| < \infty. \tag{4.27}$$

Действительно, положим $\sigma_R = \sum\limits_{0<|m|<R} |m|^{-(n/2)+1/2} e^{2\pi i m\cdot x^0}$; тогда

$$\sum_{0<|m|<R} e^{2\pi i m\cdot x^0} = \int_1^R t^{(n/2)-1/2}\, d\sigma_t =$$

$$= R^{n/2-1/2}\sigma_{R^{-(n/2-1/2)}} \int_1^R \sigma_t t^{n/2-3/2} dt.$$

Отсюда ясно, что из предположения $\sup\limits_{0<R<\infty} |\sigma_R| < \infty$ следует (4.27).

Покажем теперь, что

$$\sup_{0<R<\infty} R^{-n/2+1/2} \left| \sum_{0<|m|<R} e^{2\pi i m\cdot x^0} \right| = \infty$$

для всех x^0, таких, что

$$\sup_{0<R<\infty} \left| \sum_{|m|<R} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^{(n-1)/2} e^{2\pi i m\cdot x^0} \right| = \infty$$

(согласно лемме 4.6, почти все $x^0 \in Q_n$ удовлетворяют этому соотношению), т. е. покажем, что

$$\sup_{0<R<\infty} R^{-n/2+1/2} |K_R^0(x^0) - 1| = \infty$$

для всех x^0, таких, что

$$\sup_{0<R<\infty} |K_R(x^0)| = \sup_{0<R<\infty} |K_R^{(n-1)/2}(x^0)| = \infty.$$

Легче проделать это для нечетного n, причем простейший случай возникает, когда $n = 3$. Рассмотрим этот случай; при этом критический показатель равен $(n-1)/2 = 1$. Для фиксированной точки

x^0 напишем

$$F_\alpha(t) = t^\alpha K^\alpha_{\sqrt{t}}(x^0) = \sum_{|m|^2<t} (t - |m|^2)^\alpha e^{2\pi i m\cdot x^0}.$$

Очевидно, что $(d/dt) F_\alpha(t) = \alpha F_{\alpha-1}(t)$ для $\alpha \geqslant 1$. Покажем, что

$$|F_2(t)| \leqslant At^{3/2}, \qquad 1 \leqslant t < \infty. \tag{4.28}$$

Действительно, когда $\alpha > (n-1)/2$, формулу суммирования Пуассона можно применить к $K^\alpha_R(x^0)$ и получить выражение (4.12). Это вместе с оценкой $|J_{(n/2)+\alpha}(2\pi R)| \leqslant AR^{-1/2}$, $R \geqslant 1$ (см. лемму 3.11 в гл. IV) показывает, что

$$|K^\alpha_R(x^0)| \leqslant AR^{(n-1)/2-\alpha}, \qquad 1 \leqslant R < \infty,$$

что по определению функции F_2 эквивалентно оценке (4.28).

Если $|R^{-(n/2)+1/2} K^0_R(x^0)| \leqslant A$, то (так как $n = 3$)

$$\frac{1}{2}\left|\frac{d^2F_2(t)}{dt^2}\right| = |F_0(t)| \leqslant At^{1/2}, \qquad 1 \leqslant t < \infty. \tag{4.29}$$

Используя разложение F_2 по формуле Тейлора до членов второго порядка, видим, что

$$|F_2(t+h) - F_2(t) - hF_2'(t)| \leqslant \frac{h^2}{2} \sup_{t \leqslant t' \leqslant t+h} |F_2''(t)|.$$

Положим $h = t^{1/2}$; тогда из (4.28) и (4.29) следует, что $|F_2'(t)| \leqslant Bt$, $1 \leqslant t < \infty$. Таким образом, $|F_1(t)| \leqslant Bt/2$ и, следовательно, $\sup_{1 \leqslant R < \infty} |K_R(x^0)| \leqslant B$. Отсюда видно, что

$$\sup_{R>0} R^{-(n/2)+1/2} |K^0_R(x^0) - 1| = \infty,$$

если $\sup_{R>0} |K_R(x^0)| = \infty$. Это завершает доказательство теоремы 4.3 в случае $n = 3$. Другие случаи $n > 1$ аналогичны, но несколько более сложны. Необходимая для их доказательства техника описана в п. 6.10 ниже.

5. Суммируемость ниже критического показателя

Пусть $\sum_{m \in \Lambda} a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ — ряд Фурье функции f и

$$S^\alpha_R(f)(x) = \sum_{|m|<R} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^\alpha a_m e^{2\pi i m\cdot x}$$

— соответствующие средние Рисса порядка α. Обозначим через $S^\alpha_*(f)(x)$ соответствующую «максимальную функцию», т. е.

$$S^\alpha_*(f)(x) = \sup_{0<R<\infty} |S^\alpha_R(f)(x)|.$$

В этом параграфе мы покажем, что если $f \in L^p(T_n)$, $1 < p < \infty$, то имеются положительные результаты о суммируемости ниже критического показателя. Доказываемая теорема, ввиду контрпримеров § 4, не решает полностью проблем суммируемости кратных рядов Фурье. Тем не менее она расширяет наши знания по данному вопросу[1].

Теорема 5.1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $n > 1$ *и* $\alpha > (n-1)|{}^1\!/_2 - 1/p|$. *Тогда:*

(a) $\|S_*^\alpha(f)\|_p \leqslant A_{p,\alpha}\|f\|_p$;

(b) $\lim\limits_{R\to\infty} S_R^\alpha(f)(x) = f(x)$ *для почти всех* x;

(c) $\|S_R^\alpha(f) - f\|_p \to 0$ *при* $R \to \infty$.

Эта теорема будет выведена из двух лемм; первая из них является другой формулировкой результатов, полученных в § 2, когда α было больше критического показателя, а вторая есть L^2-результат для α, близких к нулю, и, наконец, комбинация этих двух оценок получается с помощью комплексной выпуклости норм линейных операторов (теорема 4.1 гл. V). Первая лемма такова:

Лемма 5.2. *Когда* $\alpha > (n-1)/2$, *утверждение* (a) *теоремы* 5.1 *справедливо.*

Напомним читателю, что, когда $\alpha > (n-1)/2$, утверждения (b) и (c) теоремы 5.1 содержатся в теореме 2.11 и, в частности, в ее следствии 2.15.

Доказательство. Пусть $f \in L^p(T_n)$. Будем использовать символ f и для обозначения периодического продолжения этой функции на E_n. В силу следствия 2.15 (см. также замечания перед этим следствием), имеем

$$S_R^\alpha(f)(x) = \int\limits_{Q_n} \sum_{m\in\Lambda} \varphi_\varepsilon(y+m) f(x-y)\,dy = \int\limits_{E_n} \varphi_\varepsilon(y) f(x-y)\,dy$$

для подходящей функции φ, где $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ и $\varepsilon = 1/R$.

Заметим, что при доказательстве оценки (a) для $S_*^\alpha(f) = \sup\limits_{0<R<\infty} |S_R^\alpha(f)|$ достаточно ограничиться случаем $R \geqslant 1$ (т. е. $\varepsilon \leqslant 1$), поскольку если $R < 1$, то $S_R^\alpha(f) = a_0$ и $|a_0| \leqslant \|f\|_1 \leqslant \|f\|_p$. Положим теперь $\tilde{f}(x) = 0$ при $|x| > 1$. Тогда ясно, что

$$\left(\int\limits_{E_n} |\tilde{f}(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant A\left(\int\limits_{Q_n} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

---

[1] См., однако, недавний результат Фефермана [1].

Кроме того,

$$(f*\varphi_\varepsilon)(x)=\int\limits_{|y|\leqslant 1}\varphi_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy+\int\limits_{|y|>1}\varphi_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy.$$

Мы уже отмечали (см. абзац перед (2.14)), что в этом случае

$$\varphi(x)=\pi^{-\alpha}\Gamma(\alpha+1)\,|x|^{-(\alpha+n/2)}J_{\alpha+n/2}(2\pi|x|).$$

Поэтому, в силу (3.12) гл. IV, $|\varphi(x)|\leqslant A(1+|x|^{-n-\delta})$, $\delta=\alpha-(n-1)/2$. Следовательно, как было показано при доказательстве теоремы 2.11,

$$\left|\int\limits_{|y|>1}\varphi_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy\right|\leqslant A'\varepsilon^{\delta}\left(\sum_{m\neq 0}|m|^{-n-\delta}\right)\int\limits_{Q_n}|f(x)|\,dx.$$

Но

$$\int\limits_{|y|\leqslant 1}\varphi_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy=\int\varphi_\varepsilon(x-y)\tilde f(y)\,dy$$

и, согласно (3.9) гл. II,

$$\|S_*^\alpha(f)\|_p\leqslant A_{p,\alpha}\|f\|_p,$$

если $p>1$ и $\alpha>(n-1)/2$.

Сделаем несколько общих замечаний о средних Рисса S_R^α. Когда мы их вводили, неявно предполагалось, что порядок α неотрицателен. Тем не менее в приведенном определении ничто не мешает рассматривать отрицательное или даже комплексное α. Более того, мы будем существенно опираться на аналитическую зависимость S_R^α от α. В следующем L^2-результате уже используются отрицательные значения α.

Л е м м а 5.3. *Пусть*

$$M^\alpha(f)(x)=\sup_{0<R<\infty}\left(\frac{1}{R}\int\limits_0^R|S_t^\alpha(f)(x)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Тогда

$$\|M^\alpha(f)\|_2\leqslant A_\alpha\|f\|_2, \tag{5.4}$$

если $f\in L^2(T_n)$ *и* $\alpha>-{}^1/_2$[1].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем вспомогательную функцию $G^\alpha(f)$, определяемую равенством

$$G^\alpha(f)(x)=\left(\int\limits_0^\infty|S_R^{\alpha+1}(f)(x)-S_R^\alpha(f)(x)|^2\frac{dR}{R}\right)^{1/2}.$$

---

[1] Заметим, что величины $M^\alpha(f)$ равны средним от выражений, которые мы собираемся оценить сверху.

Покажем, что

$$\| G^{\alpha}(f) \|_2 \leqslant A_{\alpha} \| f \|_2, \tag{5.5}$$

если $f \in L^2(T_n)$ и $\alpha > -1/2$. Действительно, в силу равенства Парсеваля и теоремы Фубини,

$$\| G^{\alpha}(f) \|_2^2 = \int_0^{\infty} \left(\sum_{|m|<R} \left| \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^{\alpha+1} - \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^{\alpha} \right|^2 |a_m|^2 \right) \frac{dR}{R} =$$

$$= \sum_{m \neq 0} |a_m|^2 \int_{|m|}^{\infty} \frac{|m|^4}{R^4} \left[1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right]^{2\alpha} \frac{dR}{R} = C_{\alpha} \sum_{m \neq 0} |a_m|^2.$$

Третье равенство следует из того, что

$$\int_{|m|}^{\infty} \frac{|m|^4}{R^4} \left[1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right]^{2\alpha} \frac{dR}{R} = \int_1^{\infty} s^{-5} (1 - s^{-2})^{2\alpha} \, ds = C_{\alpha} =$$

$$= [2(2\alpha + 1)(2\alpha + 3)]^{-1},$$

и последний интеграл сходится при $\alpha > -1/2$. Следовательно,

$$\| G^{\alpha}(f) \|_2^2 = C_{\alpha} \{ \| f \|_2^2 - |a_0|^2 \},$$

что, конечно, является более точной формой для оценки (5.5). Из (5.5) легко следует справедливость леммы. Для начала заметим, что, в силу определения функции $G^{\alpha}(f)$,

$$\sup_{0<R<\infty} \frac{1}{R} \int_0^R | S_t^{\alpha+1}(f)(x) - S_t^{\alpha}(f)(x) |^2 \, dt \leqslant [G^{\alpha}(f)(x)]^2,$$

и, таким образом,

$$M^{\alpha}(f)(x) \leqslant M^{\alpha+1}(f)(x) + G^{\alpha}(f)(x). \tag{5.6}$$

Следовательно, повторно применяя неравенство (5.6), получим

$$M^{\alpha}(f) \leqslant M^{\alpha+k}(f) + G^{\alpha}(f) + \cdots + G^{\alpha+k-1}(f). \tag{5.7}$$

Возьмем теперь $k > n/2$; тогда $\alpha + k > (n-1)/2$. Поскольку $M^{\alpha+k}(f)$, очевидно, не превосходит $S_*^{\alpha+k}(f)$, можно применить лемму 5.2 (с $p = 2$) и получить, что $\| M^{\alpha+k}(f) \|_2 \leqslant A \| f \|_2$. Это неравенство вместе с оценкой (5.5) (примененной к $G^{\alpha}(f)$, $G^{\alpha+1}(f), \ldots, G^{\alpha+k-1}(f)$) дает оценку (5.4), и лемма доказана.

Лемму 5.3 мы сможем использовать, если получим формулу, выражающую средние Рисса данного порядка в виде средних от средних Рисса более низких порядков. Необходимые вычисления

уже были проведены при доказательстве леммы 4.8. Действительно, равенство

$$\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^{\beta+\delta}=C_{\beta,\delta}R^{-2\beta-2\delta}\int\limits_{|m|}^{R}(R^2-t^2)^{\beta-1}t^{2\delta+1}\left(1-\frac{|m|^2}{t^2}\right)^{\delta}dt,$$

где $C_{\beta,\delta}=2\Gamma(\delta+\beta+1)/\Gamma(\delta+1)\Gamma(\beta)$, немедленно дает искомое выражение, а именно

$$S_R^{\delta+\beta}=C_{\beta,\delta}R^{-2\beta-2\delta}\int\limits_0^R(R^2-t^2)^{\beta-1}t^{2\delta+1}S_t^{\delta}dt. \tag{5.8}$$

Отсюда следует, что

$$|S_R^{\beta+\delta}(f)(x)|\leqslant C_{\beta,\delta}R^{-2\beta-2\delta}\left(\int\limits_0^R|(R^2-t^2)^{\beta-1}t^{2\delta+1}|^2dt\right)^{1/2}\times$$

$$\times R\cdot R^{-1}\left(\int\limits_0^R|S_t^{\delta}(f)(x)|^2dt\right)^{1/2}.$$

Взяв верхнюю грань по всем $R>0$, получим

$$S_*^{\beta+\delta}(f)(x)\leqslant C'_{\beta,\delta}M^{\delta}(f)(x),\qquad \beta>1/2\,[1]. \tag{5.9}$$

Наконец, для данного $\alpha>0$ возьмем β и δ такими, чтобы $\beta+\delta=\alpha$, $\delta>-{}^1/_2$ и $\beta>{}^1/_2$. Тогда, объединяя (5.9) и лемму 5.3, получим следующее основное неравенство для L^2-случая:

Лемма 5.10. *Если* $\alpha>0$, *то* $\|S_*^{\alpha}(f)\|_2\leqslant A_\alpha\|f\|_2$ *для всех* f *из* $L^2(T_n)$.

Прервем временно наши усилия, направленные на доказательство теоремы 5.1, для того чтобы посмотреть, чего мы уже достигли. Главной частью теоремы является неравенство для максимальной функции (часть (а)); если его доказать, то все остальное уже дело техники. Когда p близко к 1 или ∞, часть (а) фактически уже содержится в лемме 5.2. Кроме того, лемма 5.10 дает это неравенство для частного случая $p=2$. Общий случай можно вывести из этих частных случаев при помощи интерполяционной теоремы, доказанной в § 4 гл. V. Хотя такой вывод основан на простых идеях, детали доказательства довольно громоздки. Сначала необходимо усилить два только что упомянутых частных

[1] Заметим, что если $\beta>1/2$, то

$$R^{1-2\beta-2\delta}\int\limits_0^R|(R^2-t^2)^{\beta-1}t^{2\delta+1}|^2dt=\int\limits_0^1|(1-t^2)^{\beta-1}t^{2\delta+1}|^2dt<\infty.$$

случая и включить комплексные порядки α. Это усиление получается из очень простого общего принципа, утверждающего, что если имеется оценка для $S_*^\alpha(f)$, где $\alpha \geqslant 0$, то справедлива соответствующая оценка и для $S_*^{\alpha'}(f)$, где α' комплексно и $\operatorname{Re}\alpha' > \alpha$. Это следует из формулы (5.8) с $\delta = \alpha$, $\beta + \delta = \alpha'$ (и $\operatorname{Re}\delta > 0$). Действительно, имеем

$$S_*^{\alpha'}(f) \leqslant S_*^\alpha(f)\, C_{\beta,\delta} \int_0^1 (1-s^2)^{\operatorname{Re}\beta - 1} s^{2\alpha+1}\, ds = \frac{|\Gamma(\alpha'+1)|\,\Gamma(\operatorname{Re}\beta)}{\Gamma(\operatorname{Re}\alpha'+1)\,|\Gamma(\beta)|}\, S_*^\alpha(f).$$

Поскольку $\Gamma(\alpha'+1) \leqslant |\Gamma(\operatorname{Re}\alpha'+1)|$, это дает

$$S_*^{\alpha'}(f) \leqslant D_\beta S_*^\alpha(f), \tag{5.11}$$

где $D_\beta = \Gamma(\operatorname{Re}\beta)/|\Gamma(\beta)|$.

Поскольку операторы $f \to S_*^\alpha(f)$ нелинейны, а мы хотим применить интерполяционную теорему к линейным операторам, необходимо ввести другое техническое средство. Для этого обозначим через $\mathscr{C}$ класс неотрицательных измеримых функций на T_n, принимающих только конечное число различных значений. Пусть $R \in \mathscr{C}$; тогда

$$|S_{R(x)}^\alpha(f)(x)| \leqslant S_*^\alpha(f)(x). \tag{5.12}$$

При этом справедливо следующее обращение этого неравенства:

$$\sup_{R \in \mathscr{C}} \|S_R^\alpha(f)(x)\|_p = \|S_*^\alpha(f)(x)\|_p. \tag{5.13}$$

Это вытекает из очевидного утверждения, что существует последовательность $R_1(x), \ldots, R_j(x), \ldots$ элементов из $\mathscr{C}$, такая, что

$$\lim_{j\to\infty} |S_{R_j(x)}^\alpha(f)(x)| = \sup_{0<R<\infty} |S_R^\alpha(f)(x)| = S_*^\alpha(f)(x)$$

для всех $x \in T_n$.

Фиксируя теперь элемент $R \in \mathscr{C}$, рассмотрим *линейные* операторы

$$f \to S_{R(x)}^\alpha(f)(x), \tag{5.14}$$

аналитически зависящие от параметра α. Пусть f — интегрируемая функция и $f(x) \sim \sum_{m\in\Lambda} a_m e^{2\pi i m\cdot x}$. Поскольку $R(x)$ принимает только конечное число различных значений (и, в частности, ограничена), легко заметить, что функция

$$S_{R(x)}^\alpha(f)(x) = \sum_{|m| \leqslant R(x)} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2(x)}\right)^\alpha a_m e^{2\pi i m\cdot x}$$

аналитична по переменной α и имеет по ней допустимый рост в любой вертикальной полосе на комплексной плоскости α (в смысле теоремы 4.1 гл. V).

Положим $\alpha = \mu + i\nu$, $\mu_0 > 0$ и $\mu_1 > (n-1)/2$. Тогда, согласно (5.12), (5.11) и (5.10) с $\alpha' = \mu_0 + i\nu$, $\alpha = \mu_0/2$, $\beta = (\mu_0/2) + i\nu$, имеем

$$\| S_{R(x)}^{\mu_0+i\nu}(f)(x) \|_2 \leqslant A_0(\nu) \| f \|_2 \tag{5.15}$$

для всех простых функций f, где

$$A_0(\nu) \leqslant A_0 \frac{\Gamma(\mu_0/2)}{|\Gamma((\mu_0/2) + i\nu)|} \leqslant A_0' e^{\pi|\nu|}\ {}^{1)}.$$

Важно, что оценка для $A_0(\nu)$ не зависит от выбора $R \in \mathscr{C}$. Аналогично, согласно формулам (5.12), (5.11) и (5.2) с $\alpha' = \mu_1 + i\nu$, $\alpha = (1/2)[\mu_1 + (n-1)/2]$, $\beta = (1/2)[\mu_1 - (n-1)/2] + i\nu$, имеем

$$\| S_{R(x)}^{\mu_1+i\nu}(f)(x) \|_{p_1} \leqslant A_{1,p_1}(\nu) \| f \|_{p_1} \tag{5.16}$$

для всех простых функций f, $1 < p_1 < \infty$, $\mu_1 > (n-1)/2$, где $A_{1,p_1}(\nu) \leqslant A'_{1,p_1} e^{\pi|\nu|}$. Здесь опять постоянные не зависят от $R(x)$.

Используем теперь интерполяционную теорему 4.1 гл. V. Сохраняя введенные там обозначения, положим $0 < t < 1$, $p_0 = 2$, и пусть p_1 — индекс из неравенства (5.16). Тогда, если $\mu = \mu_0(1-t) + \mu_1 t$ и $1/p = (1-t)/p_0 + t/p_1 = (1-t)/2 + t/p_1$, то

$$\| S_{R(x)}^{\mu}(f)(x) \|_p \leqslant A_p \| f \|_p.$$

Опять A_p не зависит от выбора $R(x) \in \mathscr{C}$. Но из (5.17) и (5.13) следует неравенство

$$\| S_*^{\mu}(f) \|_p \leqslant A_p \| f \|_p. \tag{5.18}$$

Покажем, что ограничения на p и μ в (5.18) в точности те же, что и в теореме 5.1, т. е. $1 < p < \infty$ и $\mu > (n-1)|1/2 - 1/p|$. Вспомним, что $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > (n-1)/2$ и $1 < p_1 < \infty$, в то время как $\mu = \mu_0(1-t) + t\mu_1$ и $1/p = (1-t)/2 + 1/p_1$. Предположим сначала, что $p \leqslant 2$. Если положить $p_0 = 1$, $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = (n-1)/2$, то элементарные вычисления дают $\mu = (n-1) \times [1/p - 1/2]$. Ясно также, что μ непрерывно зависит от p_1, μ_0 и μ_1 (в этом можно убедиться, выразив t через эти параметры). Таким образом, по непрерывности всегда можно подобрать такие $p_0 > 1$, $\mu_0 > 0$ и $\mu_1 > (n-1)/2$, что μ будет удовлетворять неравенству $\mu > (n-1)|1/p - 1/2|$. Если $p \geqslant 2$, то рассуждения

---

1) Более точные оценки для $A_0(\nu)$ можно получить, используя асимптотическую формулу $|\Gamma((\mu/2) + i\nu)| \sim \sqrt{2\pi}|\nu|^{(\mu-1)/2} e^{-\pi|\nu|/2}$ при $\nu \to \infty$, но для применения интерполяционной теоремы 4.1 гл. V эти оценки не нужны.

будут аналогичными, надо только взять $p_0 = \infty$. Это завершает доказательство части (a) теоремы 5.1.

Части (b) и (c) получаются отсюда с помощью общей теории сходимости семейств операторов, развитой во второй главе (см., в частности, теорему 3.12), поскольку, если выбрать функцию f из класса тригонометрических полиномов (который плотен в $L^p(T_n)$ при $p < \infty$), то $S_R^\alpha(f)(x)$ будет равномерно сходиться к $f(x)$ при $R \to \infty$ для любого $\alpha \geqslant 0$.

6. Дальнейшие результаты

6.1. С помощью рассуждений, аналогичных использованным при доказательстве теоремы 2.17, можно показать, что каждый из приведенных ниже рядов является рядом Фурье периодической функции, непрерывно дифференцируемой на основном кубе всюду, за исключением точки 0, и имеющей, кроме того, указанное поведение:

(a) $\sum\limits_{m \neq 0} |m|^{-n} e^{2\pi i m \cdot x}$ асимптотически ведет себя как $c \cdot \log(1/|x|)$ при $|x| \to 0$;

(b) если P_k — однородный гармонический многочлен степени $k \geqslant 1$, то $\sum\limits_{m \neq 0} |m|^{-n-k} P_k(m) e^{2\pi i m \cdot x}$ — ограниченная функция;

(c) $\sum\limits_{m \neq 0} |m|^{-\alpha-k} b(|m|) P_k(m) e^{2\pi i m \cdot x}$ асимптотически ведет себя как $c|x|^{-(n-\alpha)-k} b(1/|x|) P_k(x)$ при $|x| \to 0$, если P_k — однородный гармонический многочлен степени $k \geqslant 0$, $0 < \alpha < n$ и $b(x)$ — подходящая функция, медленно меняющаяся вблизи ∞ (примером допустимых функций b служат функции, ведущие себя при больших $|x|$, как $(\log|x|)^\alpha$, $(\log(\log|x|))^c$, $\exp(\log|x|)^{1/2}$ и т. д., а также как произведения и частные таких функций). Одномерную теорию см. в книге Зигмунда [1], а n-мерную — в работе Вейнгера [1].

6.2. Несколько примеров другой природы можно получить с помощью формулы суммирования Пуассона:

(a) $\sum\limits_{m \neq 0} e^{ci|m| \log |m|} |m|^{-\varepsilon-n/2} e^{2\pi i m \cdot x}$ — ряд Фурье непрерывной периодической функции, если $c \neq 0$ и $\varepsilon > 0$;

(b) если размерность n четна, то $\sum\limits_{|m|>1} |m|^{-n} (\log|m|)^{-1} \times e^{ci|m|(\log|m|)^\alpha} e^{2\pi i m \cdot x}$, $c \neq 0$ и $0 < \alpha < 2/n$, есть ряд Фурье функции класса $C^{n/2}$, но не абсолютно сходящийся.

В одномерном случае пример (a) был получен Харди и Литтлвудом. Оба примера (a) и (b) см. в работе Вейнгера [1], где приве-

дены и другие примеры. Пример (b), между прочим, показывает, что простое следствие 1.9 нельзя сильно улучшить.

6.3. Следующие рассуждения дают некоторую интерпретацию эвристической формулы (2.16). Пусть $P_k(x)$ — однородный гармонический многочлен степени k. Фиксируем точку x и рассмотрим следующие две функции переменной α:

$$\sum_{m \neq 0} \frac{P_k(m)}{|m|^{k+\alpha}} e^{2\pi i m \cdot x} \text{ для } \operatorname{Re} \alpha > n$$

и

$$\gamma_{\alpha,k}^{-1} \sum_{m \neq 0} \frac{P_k(x+m)}{|x+m|^{k+n-\alpha}} \text{ для } \operatorname{Re} \alpha < 0,$$

где $\gamma_{\alpha,k} = i^{-k}\pi^{n/2-\alpha}\Gamma((k+\alpha)/2)/\Gamma((n+k-\alpha)/2)$. Эти две функции переменной α совпадают в том смысле, что они являются аналитическим продолжением одна другой (см. Хекке [1] и Бохнер [6]).

6.4. Пусть $S \subset E_n$ — выпуклое, симметричное, открытое и ограниченное множество. Пусть $|S| > 2^n$. Тогда S содержит по крайней мере одну точку решетки, отличную от нуля. Эту классическую теорему Минковского следующим образом можно доказать с помощью формулы суммирования Пуассона. Положим $S_{1/2} = \{x;\ 2x \in S\}$, и пусть φ — характеристическая функция множества $S_{1/2}$. Положим $f = \varphi * \varphi$, так что $\hat{f} = |\hat{\varphi}|^2 \geqslant 0$. Можно показать, что если нуль есть единственная точка решетки, лежащая в S, то $f(m) = 0$ при $m \neq 0$. Более того, справедлива формула суммирования Пуассона $\sum f(m) = \sum \hat{f}(m)$. Если нуль есть единственная точка решетки, лежащая в S, то $f(0) = \sum \hat{f}(m) \geqslant \hat{f}(0)$. Но это противоречит тому, что $f(0) = \int \varphi(x)\,dx = |S_{1/2}|$, а $\hat{f}(0) = \int f(x)\,dx = |S_{1/2}|^2$. Приведенные рассуждения восходят к Зигелю [1].

6.5. Пусть $\sum_{m \in \Lambda} a_m e^{2\pi i m \cdot x}$ — данный формальный тригонометрический ряд. Тогда n рядов

$$-i \sum_{m \neq 0} a_m \frac{m_k}{|m|} e^{2\pi i m \cdot x}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

будут преобразованиями Рисса этого ряда. Положим

$$u_0(x, t) = \sum_{m \in \Lambda} a_m e^{-2\pi |m| t} e^{2\pi i m \cdot x}$$

и

$$u_k(x, t) = -i \sum_{m\neq 0} a_m \frac{m_k}{|m|} e^{-2\pi|m|t} e^{2\pi i m\cdot x} \quad \text{для } t > 0$$

(считая, что ряды, определяющие функции u_k, $k=0, \ldots, n$, сходятся). Заметим, что $(n+1)$-строка $F=(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ удовлетворяет обобщенным уравнениям Коши — Римана (4.13) гл. VI. По аналогии с развитой там теорией будем говорить, что $F \in \mathbf{H}^p(T_n)$, если $\sup\limits_{t>0} \int\limits_{T_n} |F(x, t)|^p\, dx < \infty$.

(a) $F \in \mathbf{H}^p(T_n)$, $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{m\in\Lambda} a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ — ряд Фурье некоторой функции из $L^p(T_n)$. Это можно доказать с помощью результатов § 3.

(b) Пусть $(n-1)/n < p < \infty$ и $F \in \mathbf{H}^p(T_n)$; тогда

$$\int\limits_{T_n} \sup_{t>0} |F(x, t)|^p\, dt < \infty$$

и $\lim\limits_{t\to 0} F(x, t)$ существует почти всюду и по норме пространства $L^p(T_n)$.

(c) Для частного случая $p=1$ справедливо следующее обобщение классической теоремы Ф. и М. Риссов (см. также п. 5.8 в гл. VI). Пусть $\sum\limits_{m\in\Lambda} a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ и $\sum\limits_{m\neq 0} a_m (m_k/|m|) e^{2\pi i m\cdot x}$, $k=1, 2, \ldots, n$, — ряды Фурье — Стилтьеса конечных мер; тогда эти меры абсолютно непрерывны.

Утверждения (b) и (c) доказываются рассуждениями, аналогичными приведенным в гл. VI. (См. также Шапиро [1].)

(d) Справедлив следующий результат, дополняющий предыдущее утверждение (не имеющее аналога при $n=1$). Пусть $\sum\limits_{m\in\Lambda} a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ и $\sum\limits_{m\neq 0} a_m (m_k/|m|)\, e^{2\pi i m\cdot x}$, $k=1, 2, \ldots, n$, — ряды Фурье — Стилтьеса конечных мер; тогда для каждого однородного (степени r) гармонического многочлена $P_r(x)$, $r=0, 1, 2, \ldots$, ряд $\sum\limits_{m\neq 0} (P_r(m)/|m|^r)\, a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ есть ряд Фурье некоторой функции из $L^1(T_n)$. Это утверждение доказывается с помощью техники, приведенной в книге Стейна [3], гл. VII.

6.6. Теорема 2.11 и лемма 5.2 допускают следующую более общую формулировку. Пусть $\varphi \in L^1(E_n)$ и $\int\limits_{E_n} \varphi(x)\, dx = 0$. Поло-

жим $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ и $K_\varepsilon(x) = \sum_{m \in \Lambda} \varphi_\varepsilon(x + m)$. Рассмотрим

$$(f * K_\varepsilon)(x) = \int_{T_n} f(x - y) K_\varepsilon(y)\, dy.$$

Тогда:

(a) если $f \in L^p(T_n)$, $1 \leqslant p < \infty$, то $f * K_\varepsilon \to f$ по $L^p(T_n)$-норме при $\varepsilon \to 0$;

(b) пусть, кроме того, $\psi(x) = \sup\limits_{|x| \leqslant |x'|} |\varphi(x')|$ интегрируема на E_n. Тогда $(f * K_\varepsilon)(x) \to f(x)$ в каждой точке лебегова множества функции f. Кроме того, если $\tilde{f}(x) = f(x)$ при $|x| \leqslant 1$ и $\tilde{f}(x) = 0$ при $|x| > 1$, то

$$\sup_{\varepsilon > 0} |(f * K_\varepsilon)(x)| \leqslant A m_{\tilde{f}}(x).$$

6.7. Пусть λ — комплекснозначная функция, определенная на E_n, класса C^n всюду, кроме нуля. Пусть существует постоянная A, такая, что $|D^\alpha \lambda(x)| \leqslant A/|x|^{|\alpha|}$ для всех $0 \leqslant |\alpha| \leqslant n$. Тогда последовательность $\{\lambda(m)\}$, $m \in \Lambda$ $(\lambda(0) = 0)$ будет мультипликатором типа $(L^p(T_n), L^p(T_n))$ для $1 < p < \infty$. Эта теорема восходит к Марцинкевичу [1], где доказано несколько более сильное утверждение. При тех же условиях λ является также мультипликатором и в непериодическом случае (т. е. $\lambda \in (L^p(E_n), L^p(E_n))$ для $1 < p < \infty$), но исторически этот результат появился гораздо позднее (см. Михлин [1] и Хёрмандер [1]). Непериодический вариант можно также вывести непосредственно из периодического, используя теорему 3.18. См. также Стейн [3], гл. IV.

6.8. Теорема 5.1 показывает, что $\|S_*^{(n-1)/2}(f)\|_p \leqslant A_p \|f\|_p$, $1 < p < \infty$, если $f \in L^p(T_n)$. Этот результат для критического показателя можно обобщить, рассмотрев рост A_p при $p \to 1$ или $p \to \infty$. Действительно, некоторое усовершенствование доказательства теоремы 5.1 позволяет заключить, что $A_p \leqslant A(p-1)^{-2}$ для $1 < p < 2$ и $A_p \leqslant Ap$ для $2 \leqslant p < \infty$.

(a) С помощью оценки для A_p по p вблизи 1 получаем неравенство $\|S_*^{(n-1)/2}(f)\|_1 \leqslant A \int_{T_n} |f| (\log^+ |f|)^2\, dx + B$. Следовательно, если функция $|f| (\log^+ |f|)^2$ интегрируема, то $\lim\limits_{R \to \infty} S_R^{(n-1)/2}(f)(x) = f(x)$ для почти всех x.

(b) Из оценки A_p для больших p следует, что если f ограничена, то существует постоянная $a>0$, такая, что

$$\int_{T_n} \exp\{aS_*^{(n-1)/2}(f)(x)\}\,dx<\infty.$$

Часть (a) см. в работе Стейна [4]; там же неявно содержится оценка для A_p, необходимая для доказательства части (b).

6.9. Мы уже заметили, что при критическом показателе локализация не имеет места для всех функций из $L^1(T_n)$ (см. теорему 4.2 и соответствующее примечание). Однако при более сильных предположениях локализация имеет место. Если, например, предположить, что $\int_{Q_n} |f|\log^+|f|\,dx<\infty$, то локализация будет иметь место. В частности, если в данной точке x_0 функция f удовлетворяет условию Дини $\int_{Q_n} |f(x_0-t)-f(x_0)|\,|t|^{-n}\,dt<\infty$, то $S_R^{(n-1)/2}(f)(x_0)\to f(x_0)$ при $R\to\infty$. Это вытекает из следующего результата:

$$\sup_{R>0}\left(\int_{Q_n} |\Delta_R(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant Ap,\quad 1\leqslant p<\infty,$$

где

$$\Delta_R(x)=K_R^{(n-1)/2}(x)-\pi^{(n-1)/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)R^{1/2}\,|x|^{-n+1/2}\,J_{n-1/2}(2\pi R\,|x|).$$

Детали см. в работе Стейна [7].

6.10. Следующая теорема о выпуклости для средних Рисса числовых рядов может быть использована при доказательстве теоремы 4.3. Рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{k\geqslant 0} c_k$ и его средние Рисса $\sigma_R^\alpha=\sum\limits_{0\leqslant k<R}(1-k/R)^\alpha c_k$, $\alpha\geqslant 0$. Предположим, что $\sigma_R^{\alpha_j}=O(R^{a_j})$ при $R\to\infty$ для $j=0,\ 1$. Тогда, если $0<\theta<1$, $\alpha=\alpha_0(1-\theta)+\alpha_1\theta$ и $a=a_0(1-\theta)+a_1\theta$, то $\sigma_R^\alpha=O(R^a)$ при $R\to\infty$. См. Рисс [1] и Чандрасекхаран и Минакшисундаран [1]. Чтобы применить этот результат к доказательству теоремы 4.3, напишем

$$\sigma_R^\alpha=K_{R^{1/2}}^\alpha(x_0)=\sum_{|m|^2<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R}\right)^\alpha e^{2\pi i m\cdot x^0}$$

для

$$x_0\notin\Lambda\quad(\text{где } c_k=\sum_{|m|^2<k} e^{2\pi i m\cdot x^0}).$$

Мы знаем (см. неравенство (4.28)), что $\sigma_R^\alpha=O(R^{(1/2)[(n-1)/2-\alpha]})$, если $\alpha>(n-1)/2$. Если бы $\sigma_R^0=O(R^{(1/2)[(n-1)/2]})$, то из только что приведенной теоремы следовало бы, что $\sigma_R^{(n-1)/2}=O(1)$, а это противоречит лемме 4.6 для почти всех x^0.

Библиографические замечания

Для ознакомления с элементарной теорией кратных рядов Фурье и формулой суммирования Пуассона см. классическую книгу Бохнера [3], а также его последующий трактат [6]. Важность критического показателя (см. следствие 2.15) была отмечена в статье Бохнера [7]. Теорему 2.17 для n-мерного случая можно найти в мемуаре Вейнгера [1].

Основные результаты § 3 — теорема 3.8 и следствие 3.16 — получены де Лю [1]. Общие идеи рассуждений, ведущих к теореме 3.18, являются классическими, но в представленной здесь форме приводятся, по-видимому, впервые. См. также Игари [1].

Отсутствие локализации при критическом показателе для $L^1(T_n)$ было доказано в работе Бохнера [7], как было упомянуто выше. Существование $L^1(T_n)$-функции ($n > 1$), ряд Фурье которой почти нигде не суммируем по Риссу при критическом показателе, доказано Стейном [5]. Настоящая, более сильная форма теоремы 4.2, однако, является новой, так же как и теорема 4.3. Все эти результаты возникли отчасти благодаря методике, введенной Бохнером, в которой используется множество S таких точек x, что числа вида $\{|m - x|\}$ линейно независимы над полем рациональных чисел. Теорема 5.1 имеется в работе Стейна [4], а также в его работах [2] и [7], которые тесно связаны между собой. Можно рекомендовать также обзорную статью Шапиро [1], в которой рассмотрены некоторые вопросы теории кратных рядов Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Банах (Banach S.)

[1] Sur la convergence presque partout des fonctionnelles linéaires, *Bull. Sci. Math.*, **50** (1926), 27—32, 36—43.

Бари Н. К.

[1] Тригонометрические ряды, М., Физматгиз, 1961.

Безикович (Besicovitch A.)

[1] Sur la nature des fonctions à carré sommable mesurables, *Fund. Math.*, **4** (1923), 172—195.

[2] A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **41** (1945), 103—110.

[3] A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions II, ibidem, **42** (1946), 1—10.

Бенедек, Панзоне (Benedeck A., Panzone R.)

[1] The spaces L^p with mixed norm, *Duke Math. J.*, **28** (1961), 301—324.

Блюменсон (Blumenson L. E.)

[1] A derivation of n-dimensional spherical coordinates, *Am. Math. Monthly*, **67** (1960), 63—66.

Боас, Бохнер (Boas R. P., Bochner S.)

[1] On a theorem of M. Riesz for Fourier series, *J. London Math.* Soc., **14** (1939), 62—73.

Борнер (Boerner H.)

[1] Representations of Groups, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1970.

Бохнер (Bochner S.)

[1] Group invariance of Cauchy's formula in several variables, *Ann. of Math.*, **45** (1944), 686—707.

[2] Boundary values of analytic functions of several variables and of almost periodic functions, *Ann. of Math.*, **45** (1944), 708—722.

[3] Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932.

[4] Lectures on Fourier Integrals, Ann. of Math. Studies, No. 42, Princeton University Press, 1959. [Русский перевод: Бохнер С., Лекции об интегралах Фурье, М., Физматгиз, 1962.]

[5] Classes of holomorphic functions of several variables in circular domains, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **46** (1960), 721—723.

[6] Harmonic Analysis and the Theory of Probability, University of California Press, Berkeley, 1955.

[7] Summation of multiple Fourier series by spherical means, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), 175—207.

[8] Bounded analytic functions in several variables and multiple Laplace integrals, *Amer. J. Math.*, **59** (1937), 732—738.

[9] Über Faktorfolgen für Fouriersche Reihen, *Acta Szeged*, **4** (1929), 125—129.

Бохнер, Мартин (Bochner S., Martin W. T.)

[1] Several Complex Variables, Princeton University Press, 1948. [Русский

перевод: Бохнер С. и Мартин У. Т., Функции многих комплексных переменных, М., ИЛ, 1951.]

Бохнер, Чандрасекхаран (Bochner S., Chandrasekharan K.)
[1] Fourier Transforms, Ann. of Math. Studies, № 19, Princeton University Press, 1949.

Брело (Brelot M.)
[1] Eléments de la Théorie Classique du Potentiel, Centre de documentation universitaire, Paris, 1965. [Русский перевод: Брело М., Основы классической теории потенциала, М., «Мир», 1964.]

Валентайн (Valentine F. A.)
[1] Convex Sets, McGraw-Hill, New York, 1964.

Ватсон (Watson G. N.)
[1] A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1922. [Русский перевод: Ватсон Дж. Н., Теория бесселевых функций, М., ИЛ, 1949.]

Вейль А. (Weil A.)
[1] L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, Paris, 1965. [Русский перевод: Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, М., ИЛ, 1950.]

Вейль Г. (Weyl H.)
[1] The Classical Groups, Princeton University Press, 1946. [Русский перевод: Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, М., ИЛ, 1947.]

Вейнгер (Wainger S.)
[1] Special trigonometric series in k dimensions, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 59 (1965).

Вейс (Weiss Guido)
[1] An interpolation theorem for sublinear operators on H^p spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 92—99.
[2] Analisis Armonico en Verias Variables, Teoria de los Espacios H^p, Cursos y seminarios de Matematica, Universidad de Buenos Aires, fasc. 9.
[3] Harmonic Analysis, M. A. A. Studies in Mathematics, Vol. 3, I. I. Hirschman, Jr., ed., Prentice-Hall, 1965, 124—178.

Виленкин Н. Я.
[1] Специальные функции и теория представлений групп, М., «Наука», 1965.

Винберг Э. Б.
[1] Однородные конусы, *ДАН СССР*, 133 (1960), 9—12.

Винер (Wiener N.)
[1] The Fourier Integral and Certain of its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1935. [Русский перевод: Винер Н., Интеграл Фурье и некоторые его приложения, М., Физматгиз, 1963.]
[2] The ergodic theorem, *Duke Math. J.*, 5 (1939), 1—18.

Владимиров В. С.
[1]* Методы теории функций многих комплексных переменных, М., «Наука», 1964.
[2]* Обобщение интегрального представления Коши—Бохнера, *Изв. АН СССР*, сер. матем., 33 (1969), 90—108.
[3]* О представлении Коши — Бохнера, *Изв. АН СССР*, сер. матем., 36 (1972), 534—539.
[4]* Преобразование Лапласа обобщенных функций медленного роста, ВИНИТИ (в печати).

Гальярдо (Gagliardo E.)
[1] Una struttura unitaria in diverse famiglie di spazi funzionali, *Ricerche Mat.*, 10 (1961), 244—281.

Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.
[1] Обобщенные функции, вып. 1, М., Физматгиз, 1959.

Герц (Herz C. S.)
[1] Bessel functions of matrix argument, *Ann. of Math.*, 61 (1955), 474—523.

Гольдберг (Goldberg R. R.)
[1] Fourier Transforms, Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics, No. 52, Cambridge, 1965.

де Гусман (de Guzman M.)
[1] A covering lemma with applications to differentiability of measures and singular integral operators, *Studia Math.*, XXXIV (1970), 299—317.

Зигель (Siegel C. L.)
[1] Über Gitterpunkte in convexen Körpern und ein damit zusammenhängendes Extremalproblem, *Acta Math.*, 65 (1935), 307—323.

Зигмунд (Zygmund A.)
[1] Trigonometric Series, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1968. [Русский перевод: Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М., «Мир», 1965.]
[2] On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations, *Journal de Math.*, 35 (1956), 223—248.
[3] On the boundary values of functions of several complex variables, *Fund. Math.*, 36 (1949), 207—235.

Игари (Igari S.)
[1] Fourier analysis, notes to a course given at the University of Wisconsin, 1968.

Иессен, Марцинкевич, Зигмунд (Jessen B., Marcinkiewicz J., Zygmund A.)
[1] Note on the differentiability of multiple integrals, *Fund. Math.*, 25 (1935), 217—234.

Иосида (Yosida K.)
[1] Functional Analysis, Springer, Berlin, 1968. [Русский перевод: Иосида К., Функциональный анализ, М., «Мир», 1967.]

Кальдерон (Calderón A. P.)
[1] Singular integrals, *Bull. A. M. S.*, 72 (1966), 427—465.
[2] Intermediate spaces and interpolation, the complex method, *Studia Math.*, 24 (1964), 113—190.
[3] Integrales Singulares y sus Aplicaciones a Ecuaciones Diferenciales Hiperbolicas, Cursos y seminarios de Matematica, Universidad de Buenos Aires, fasc. 3.
[4] On the behavior of harmonic functions at the boundary, *Trans. A. M. S.*, 68 (1950), 47—54.

Кальдерон, Зигмунд (Calderón A. P., Zygmund A.)
[1] Note on the boundary values of functions of several complex variables, Contributions to Fourier Analysis, Ann. of Math. Studies, No. 25, Princeton University Press, 1950.
[2] On the theorem of Hausdorff-Young and its extensions, Contributions to Fourier Analysis, Ann. of Math. Studies, No. 25, Princeton University Press, 1950.
[3] On the existence of certain singular integrals, *Acta Math.*, 88 (1952), 85—139.
[4] On singular integrals, *Amer. J. Math.*, 18 (1956), 289—309.
[5] Singular integral operators and differential equations, *Amer. J. Math.*, 79 (1959), 901—921.

[6] On higher gradients of harmonic functions, *Studia Math.*, 24 (1964), 211—226. [Русский перевод: Зигмунд А. и Кальдерон А. П., О градиентах высокого порядка гармонических функций, Новосибирск, 1963.]

Карлесон (Carleson L.)

[1] On the existence of boundary values of harmonic functions of several variables, *Ark. Mat.*, 4 (1962), 393—399.

Картрайт (Cartwright M. L.)

[1] On the relation between the different types of Abel summation, *Proc. London Math. Soc.*, 31 (1930), 81—96.

Келлог (Kellog O. D.)

[1] Foundations of Potential Theory, Ungar Publ. Co., New York, 1929.

Кёхер (Koecher M.)

[1] Positivitätsbereiche im R^m, *Amer. J. Math.*, 79 (1957), 575—597.

Койфман, Вейс (Coifman R. R., Weiss G.)

[1] Representations of compact groups and spherical harmonics, *L'Ens. Math.*, 14 (1968), 121—173.

[2] On subharmonicity inequalities involving solutions of generalized Cauchy—Riemann equations, *Studia Math.*, 36 (1970), 77—83.

Колмогоров А. Н.

[1] Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier, *Fund. Math.*, 7 (1925), 23—28.

Кораньи (Korányi A.)

[1] Harmonic functions on Hermitian hyperbolic space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 135 (1969), 507—516.

[2] The Poisson integral for generalized half planes and bounded symmetric domains, *Ann. of Math.*, 82 (1965), 332—350.

Кораньи, Вольф (Korányi A., Wolf J.)

[1] Realization of Hermitian symmetric spaces as generalized half planes, *Ann. of Math.*, 81 (1965), 265—288.

Котлар (Cotlar M.)

[1] Condiciones de Continuidad de Operadores Potenciales y de Hilbert, Cursos y seminarios de Matematica, Universidad de Buenos Aires, fasc. 2.

Крейн С. Г., Петунин Ю. И.

[1] Шкалы банаховых пространств, *УМН*, 21 (1966), 89—168.

Крейн С. Г., Семенов Е. М.

[1] Об одной шкале пространств, *ДАН СССР*, 138 (1961), 763—766.

Крылов В. И.

[1]* О функциях, регулярных в полуплоскости, *Матем. сб.*, н. с., 6 (48) (1939), 95—138.

Кюран (Küran Ü.)

[1] On subharmonicity of nonnegative functions, *J. London Math. Soc.*, 40 (1965), 41—46.

Лионс (Lions J. L.)

[1] Théorèmes de traces et d'interpolation I, II, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 13 (1959), 389—403; 15 (1960), 317—331; III, *J. Math. Pures Appl.*, 42 (1963), 195—203.

Лионс, Петре (Lions J. L., Peetre J.)

[1] Sur une classe d'espaces d'interpolation, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 19 (1964), 5—68.

Лоренц (Lorentz G. G.)
[1] Some new functional spaces, *Ann. of Math.*, 51 (1950), 37—55.

де Лю (de Leeuw K.)
[1] On L^p multipliers, *Ann. of Math.*, 91 (1965), 364—379.

Люмис (Loomis L.)
[1] A note on Hilbert's transform, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52 (1946), 1082—1086.

Мадженес (Magenes E.)
[1] Spazi d'interpolazione ed equazioni a derivate parziali, Atti. Cong. Un. Mat. Ital., Genoa, 1963, 134—197.

Мартино (Martineau A.)
[1]* Theory distribut., Inst. Gulbenkian cienc. Lisboa (1964), 193—326.

Марцинкевич (Marcinkiewicz J.)
[1] Sur les multiplicateurs des séries de Fourier, *Studia Math.*, 8 (1939), 78—91.
[2] Sur l'interpolation d'operations, *C. R. Acad. des Sciences, Paris*, 208 (1939), 1272—1273.

Марцинкевич, Зигмунд (Marcinkiewicz J., Zygmund A.)
[1] On the summability of double Fourier series, *Fund. Math.*, 32 (1939), 112—132.

Михлин С. Г.
[1] Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Тр. 3-го Всесоюзного математического съезда, т. 3, 1958, 125—129.

Наймарк М. А.
[1] Нормированные кольца, М., «Наука», 1968.

Оклендер (Oaklander E. T.)
[1] L_{pq} interpolators and the theorem of Marcinkiewicz, *Bull. of the A. M. S.*, 72 (1966), 49—53.
[2] On interpolation on Banach spaces, Ph. D. thesis, University of Chicago, 1964.

О'Нейл, Вейс (O'Neil R., Weiss G.)
[1] The Hilbert transform and rearrangement of functions, *Studia Math.*, 23 (1963), 189—198.

Планшерель, Пойа (Plancherel M., Polya G.)
[1] Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples, *Comm. Math. Helv.*, 9 (1937), 224—248.

Плеснер А. И.
[1] Über die Verhalten analytischer Funktionen am Rande ihres Definitionsbereiches, *J. für reine und angew. Math.*, 159 (1927), 219—227.

Привалов И. И.
[1]* Субгармонические функции, М.—Л., ОНТИ, 1937.

Пятецкий-Шапиро И. И.
[1] Геометрия классических областей и теория автоморфных функций, М., Физматгиз, 1961.

Радо (Rado T.)
[1] Subharmonic Functions, Chelsea Publ. Co., New York, 1949.

Рисс (Riesz M.)
[1] Sur un théorème de la moyenne et ses applications, *Acta Sz.*, 1 (1923), 114—126.
[2] Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires, *Acta Math.*, 49 (1926), 465—497.

Ройден (Royden H. L.)
[1] Real Analysis, Macmillan, New York, 1963.

Рокафеллар (Rockafellar R. T.)
[1] Convex Analysis, Princeton University Press, 1970. [Русский перевод: Рокафеллар Р., Выпуклый анализ, М., «Мир», 1973.]

Ротхаус (Rothaus O. S.)
[1] Domains of positivity, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **24** (1960), 189—235.

Рудин (Rudin W.)
[1] Fourier Analysis on Groups, Interscience Publ., New York, 1962.

Сакс (Saks S.)
[1] Theory of the Integral, Hafner Publ. Co., New York, 1938. [Русский перевод: Сакс С., Теория интеграла, М., ИЛ, 1949.]

Салем, Зигмунд (Salem R., Zygmund A.)
[1] A convexity theorem, *Proc. Nat. Acad. U. S. A.*, **34** (1948), 443—447.

Соломенцев Е. Д.
[1]* О классах функций, субгармонических в полупространстве, *Уч. записки МГУ,* **10** (1958).

Стейн (Stein E. M.)
[1] Functions of exponential type, *Ann. of Math.*, **65** (1957), 582—592.
[2] Interpolation of linear operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **87** (1958), 159—172.
[3] Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press, 1970.
[4] Localization and summability of multiple Fourier series, *Acta Math.*, **100** (1958), 93—147.
[5] On limits of sequences of operators, *Ann. of Math.*, **74** (1961), 140—170.
[6] Note on the boundary values of holomorphic functions, *Ann. of Math.*, **82** (1965), 351—353.
[7] On certain exponential sums arising in multiple Fourier series, *Ann. of Math.*, **73** (1961), 87—109.

Стейн, Вейс Г. (Stein E. M., Weiss G.)
[1] On the theory of harmonic functions of several variables, *Acta Math.*, **103** (1960), 26—62.
[2] An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its applications, *J. Math. Mech.*, **8** (1959).
[3] On the interpolation of analytic families of operators on H^p spaces, *Tohoku Math. J.*, **9** (1957), 318—339.
[4] Generalizations of the Cauchy-Riemann equations and representations of the rotation group, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 163—196.
[5] Interpolation of operators with change of measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **87** (1958), 159—172.

Стейн, Вейс Г., Вейс М. (Stein E. M., Weiss G., Weiss M.)
[1] H^p classes of holomorphic functions in tube domains, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **52** (1964), 1035—1039.

Стейн, Вейс Н. (Stein E. M., Weiss N. J.)
[1] On the convergence of Poisson integrals, *Trans. A. M. S.*, **140** (1969), 34—54.

Стеклов В. А.
[1]* Sur une méthode nouvelle pour résoudre plusieurs problèmes sur le développement d'une fonction arbitraire en séries infinies, *Comptes rendus*, Paris, **144** (1907), 1329—1332.
[2]* Sur les problèmes de représentation des fonctions á l'aide de polynômes, du calcul approché des intégrales définies, du développement des fonctions en séries infinies suivant les polynômes et de l'interpolation, considérés au point de vue des idées de Tchébycheff, Proc. Int. Math. Congress, Toronto, August 11—16, 1924, vol. I, 631—640.

Стритер, Уайтмен (Streater R. F., Wightman A. S.)
[1] PCT, Spin and Statistics, and All That, Benjamin, New York, 1964. [Русский перевод: Стритер Р. Ф. и Вайтман А. С., РСТ, спин и статистика и все такое, М., «Наука», 1966.]

Тамаркин, Зигмунд (Tamarkin J. D., Zygmund A.)
[1] Proof of a theorem of Thorin, *Bull. A. M. S.*, **50** (1944), 279—282.

Тейблсон (Taibleson M. H.)
[1] Translation invariant operators, duality, and interpolation, II, *J. Math. Mech.*, **14** (1965), 821—840.

Титчмарш (Titchmarsh E. C.)
[1] Additional note on conjugate functions, *J. London Math. Soc.*, **4** (1929), 204—206.
[2] Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Clarendon Press, Oxford, 1962. [Русский перевод: Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., Гостехиздат, 1948.]

Торин (Thorin G. O.)
[1] An extension of a convexity theorem due to M. Riesz, *Kungl. Fysiografiska Saellskapet i Lund Forhaendlinger*, 8 (1939), No. 14.

Феферман (Fefferman Ch.)
[1] The multiplier problem for the ball, *Annals of Math.* (1971).

Флеминг (Fleming W. H.)
[1] Functions of Several Variables, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1965.

Хант (Hunt R. A.)
[1] On $L(p, q)$ spaces, *L'Ens. Math.*, **12** (1966), 249—275.

Хант, Уиден (Hunt R. A., Wheeden R. L.)
[1] On the boundary values of harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **132** (1968), 307—322.

Харди, Литтлвуд (Hardy G. H., Littlewood J. E.)
[1] A maximal theorem with function-theoric applications, *Acta Math.*, **54** (1930), 81—116.

Харди, Райт (Hardy G. H., Wright E. M.)
[1] An Introduction to the Theory of Numbers, 3rd edition, Oxford, 1956.

Хекке (Hecke E.)
[1] Mathematische Werke, Göttingen, 1959.

Хелгасон (Helgason S.)
[1] Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, New York, 1962. [Русский перевод: Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, М., «Мир», 1964.]

Хёрмандер (Hörmander L.)
[1] Estimates for translation invariant operators on L^p spaces, *Acta Math.*, **104** (1960), 93—139. [Русский перевод: Хёрмандер Л., Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига, М., ИЛ, 1962.]
[2] Linear Partial Differential Operators, Springer, Berlin, 1963. [Русский перевод: Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., «Мир», 1965.]

Хилле, Филлипс (Hille E., Phillips R. S.)
[1] Functional Analysis and Semi-groups, Am. Math. Soc. Coll. Publication XXXI, Providence, 1957. [Русский перевод: Хилле Э., Филлипс Р. С., Функциональный анализ и полугруппы, М., ИЛ, 1962.]

Хиршман (Hirschman I. I., jr.)
[1] A convexity theorem for certain groups of transformations, *J. d'Analyse Math.*, 2 (1953), 209—218.

Хорват (Hörvath J.)
[1] Sur les fonctions conjuguées à plusieurs variables, *Indag. Math.*, **15** (1953), 17—29.

Хуа (Hua L. K.)
[1] Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains, Vol. 6, Translations of Math. Monographs, Am. Math. Soc., Providence, 1963. [Русский перевод: Хуа Ло-кен, Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях, М., ИЛ, 1959.]

Хьюитт, Росс (Hewitt E., Ross K. A.)
[1] Abstract Harmonic Analysis I, Springer, Berlin, 1963 (готовится русский перевод).

Чандрасекхаран, Минакшисундаран (Chandrasekharan K., Minakshisundaran S.)
[1] Typical Means, Oxford University Press, 1952.

Шапиро (Shapiro V.)
[1] Fourier series in several variables, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 48—93.

Шварц (Schwartz L.)
[1] Théorie des Distributions, Hermann, Paris, 1957.
[2]* Transformation de Laplace des distributions, Medd. Lunds. Univ. Mat. Semin. (Supplementband), 1952, 196—206.

Эрдейи (Erdelyi A.) (director)
[1] Higher Transcendental Functions, Vols. I—III, Bateman Manuscript Project, McGraw-Hill, New York, 1955. [Русский перевод: Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, в 3 томах, М., «Наука», 1973.]

Эренпрейс (Ehrenpreis L.)
[1] Fourier Analysis in Several Complex Variables, Wiley-Interscience, New York, 1970.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110 ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «МИР» В 1975 г.

ВЫЙДЕТ КНИГА:

Деллашери К. **Емкости и случайные процессы**, 1972, пер. с франц., 11 л.

Книга французского математика К. Деллашери — первая в мировой литературе монография, в которой систематически излагается так называемая общая теория случайных процессов. Рассмотрены теоремы о емкостях и об измеримом выборе, классификация моментов остановки, теоремы о сечениях; выявлена взаимосвязь и общность идей и методов в таких областях, как теория емкостей, теория потенциала и теория мартингалов.

Книга предназначена всем, занимающимся теорией случайных процессов и вероятностными аспектами теории потенциала. Как учебное пособие она будет полезна аспирантам и студентам соответствующих специальностей.

И. Стейн, Г. Вейс

ВВЕДЕНИЕ В ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
НА ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Редактор Н. И. Плужникова
Художник А. В. Шипов
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Н. И. Манохина

Сдано в набор 29/V 1974 г. Подписано к печати 30/X 1974 г. Бумага тип. № 3 $60\times90^1/_{16}$. 10,5 бум. л. 21 печ. л. 19,92 уч.-изд. л. Изд. № 1/7446. Цена 1 р. 58 к. Зак. № 437.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Отпечатано в ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29, с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, г. Киев, ул. Довженко, 3

И. СТЕЙН Г. ВЕЙС